

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش تحقیق در عملیات ۳

درس دهم: شبکه‌ها و تحلیل آن‌ها

مدرس:

عباس احمدی

دانشجوی دکترای مهندسی صنایع

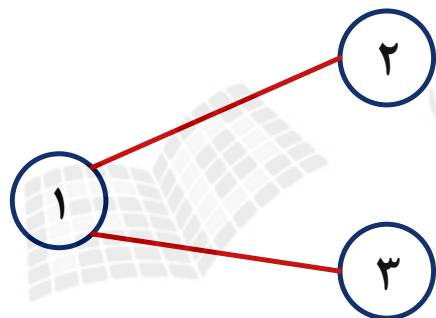
مفاهیم شبکه



گراف (Graph)

مجموعه‌ای از راس (گره)ها و یال (کمان)ها که تمام یا تعدادی از رئوس از طریق یال‌ها به یکدیگر متصل هستند. 💡

هر گراف G تنها با داشتن مشخصات رئوس (Vertices) و یال‌ها (Edges) قابل شناسایی است.



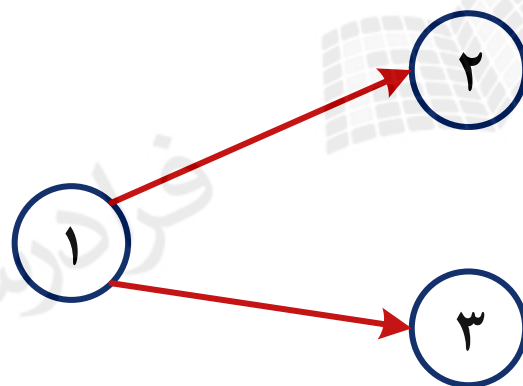
$$G = (V, E)$$

$$V(G) = \{1, 2, 3\}$$

$$E(G) = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

گراف جهت دار (Directed graph)

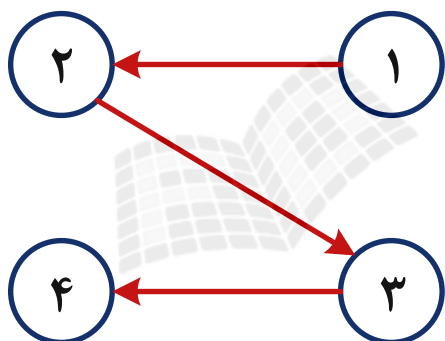
گرافی که یال‌های آن دارای جهت باشند. 💡



مسیر (Path)

دنباله‌ای متوالی از یال‌ها که از یک راس (به عنوان مبدا)، به راس دیگری (به عنوان مقصد) می‌رسند؛ به طوری که از هیچ راسی بیشتر از یک بار عبور نمی‌شود. 💡

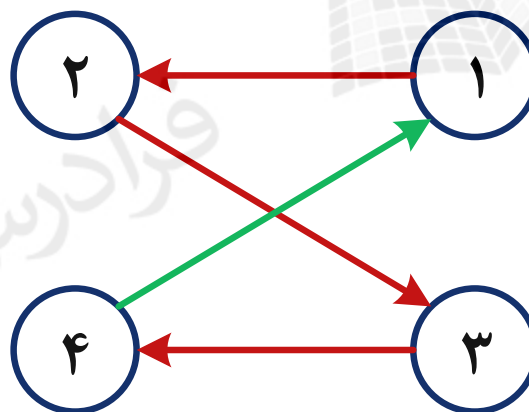
راس پایانی هر یال، راس ابتدایی یال بعدی خواهد بود.



$$p_{14} = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$$

مدار (Circuit)

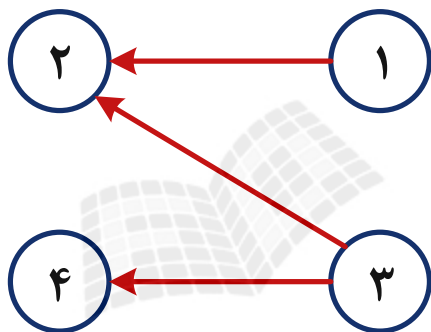
یک مسیر، به اضافه یال واصل ابتدا و انتهای آن 



رشته (Chain)

مسیری که در آن جهت یال‌ها لزوماً از راس مبدا به سمت راس مقصد نمی‌باشد. 💡

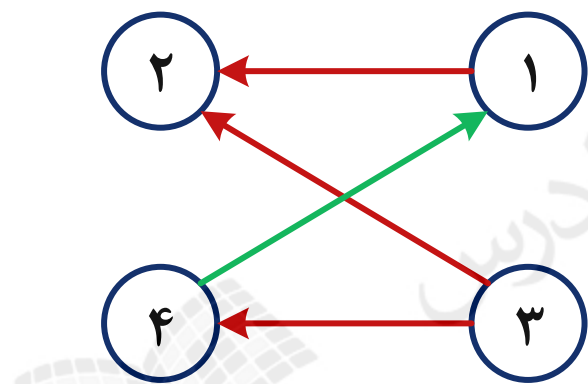
به همه رئوس دو یال وصل می‌شود، به جز رئوس ابتدا و انتها که فقط یک یال متصل است.



هر مسیر یک رشته
است، اما برعکس آن
الزاماً برقرار نیست.

دور (Cycle)

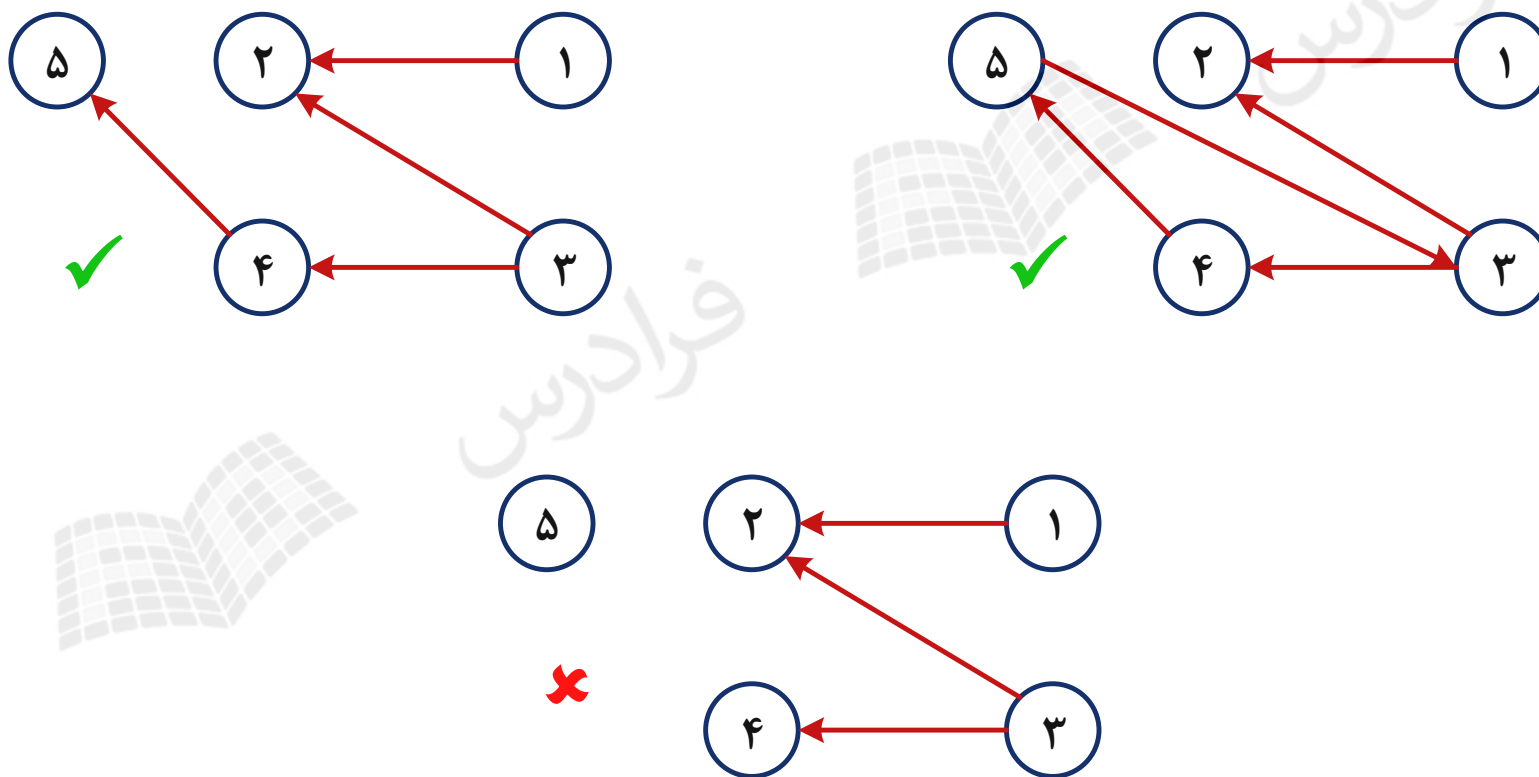
یک رشته، به اضافه یال واصل ابتدا و انتهای آن 



هر مدار یک دور است،
اما برعکس آن الزاما
برقرار نیست.

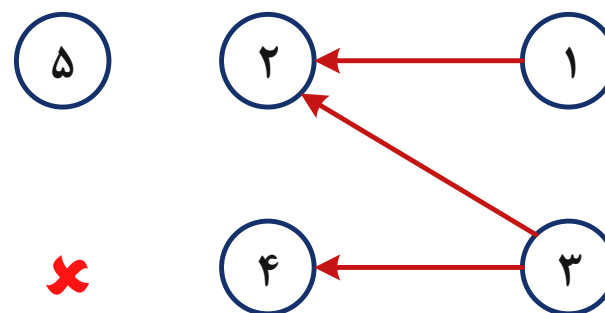
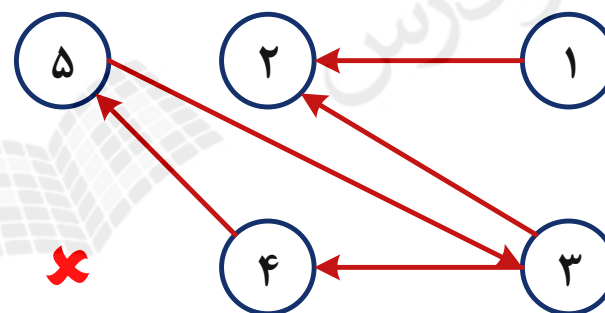
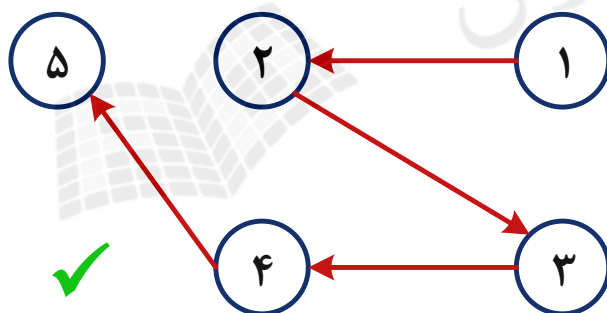
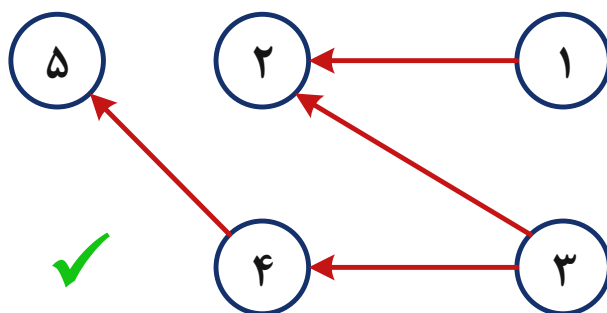
گراف همبند (Connected)

گرافی که بین هر دو راس آن یک رشته وجود داشته باشد. 💡

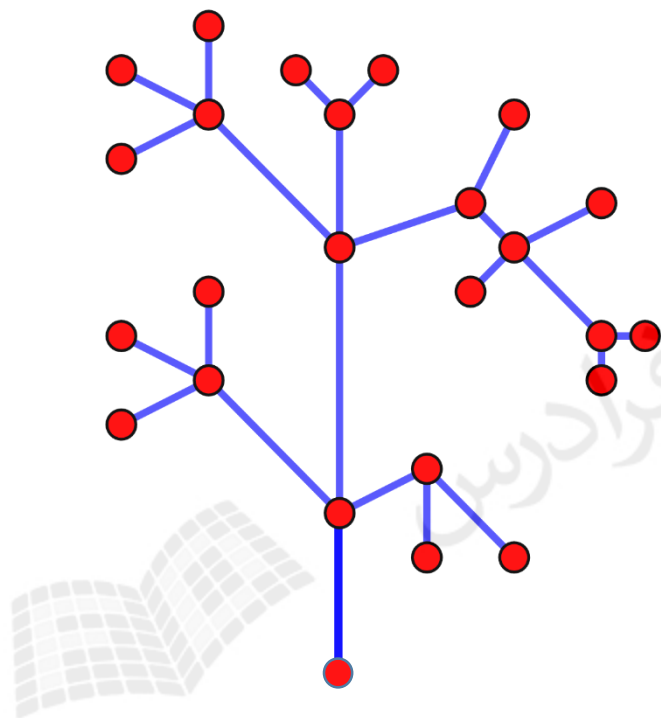


درخت (Tree)

گراف همبندی که دور ندارد. 💡



درخت (Tree)



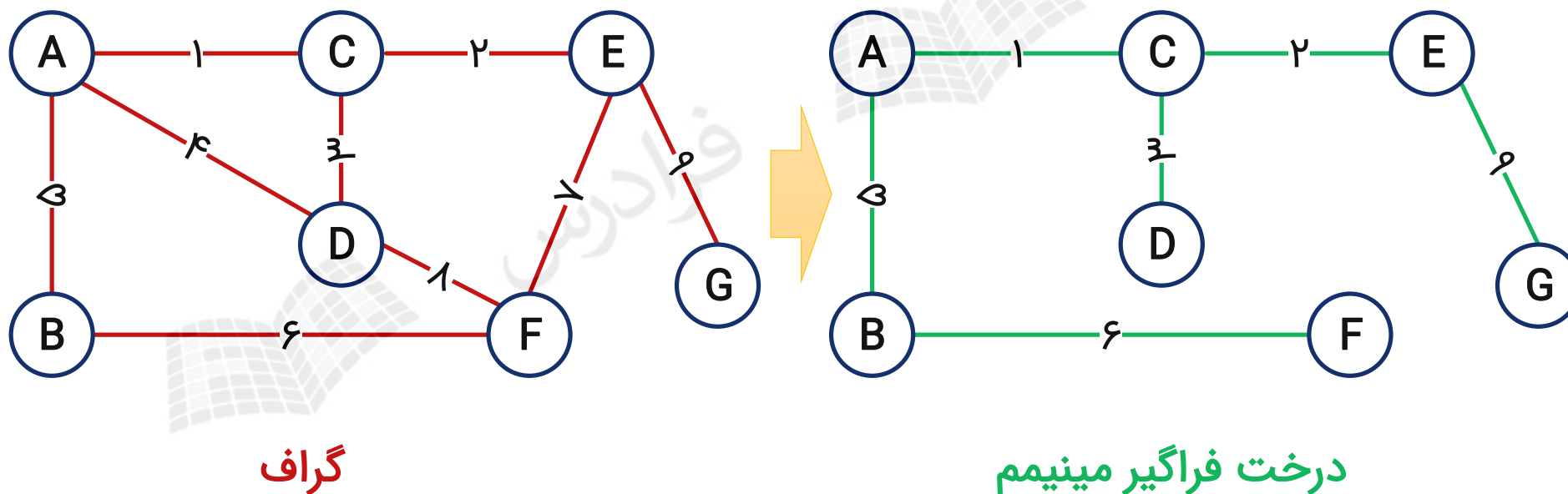
درخت (Tree)

ویژگی‌های درخت T با m راس:

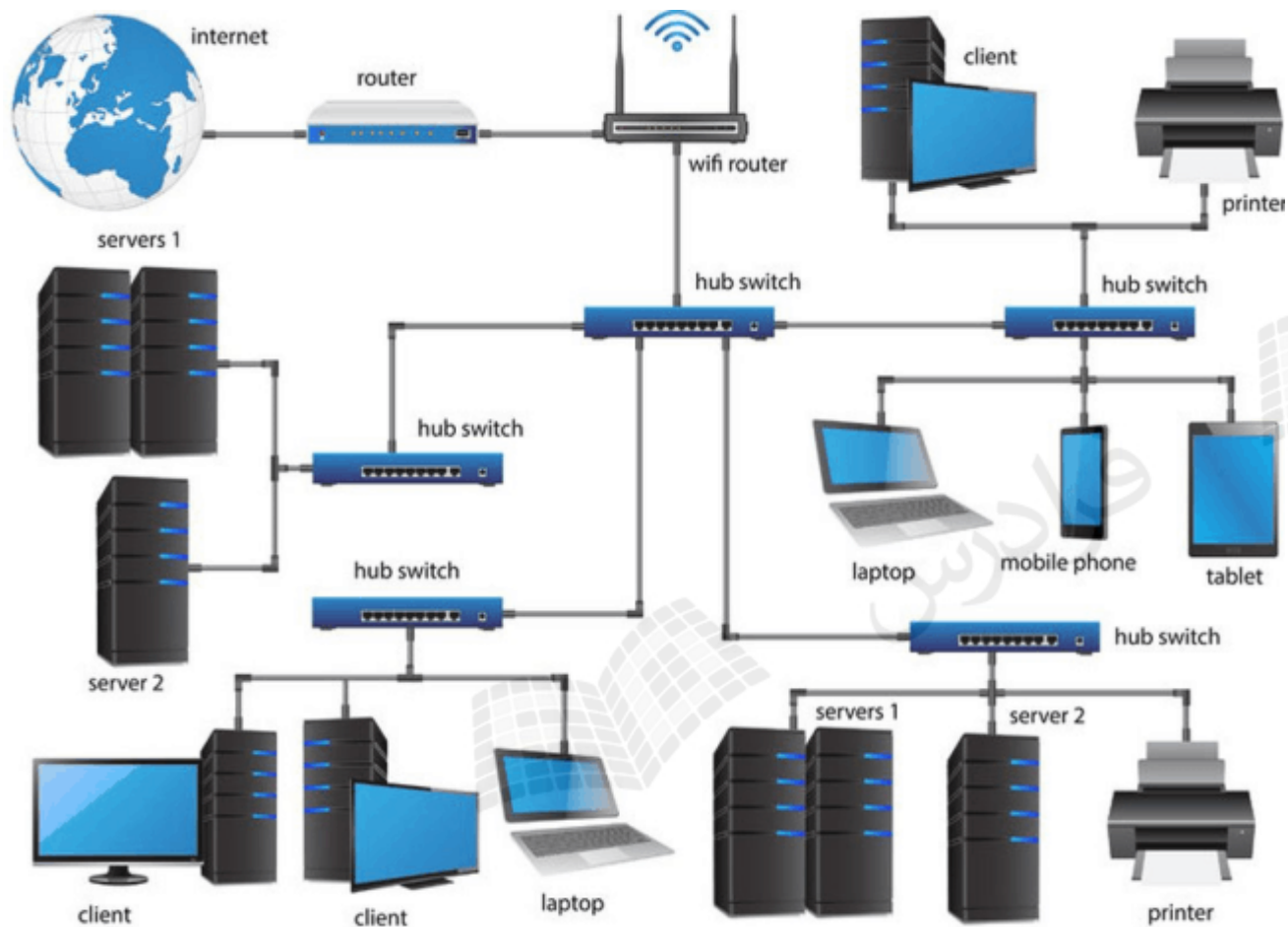
- ۱- همبند و بدون دور
- ۲- دارای $m - 1$ یال
- ۳- با اضافه کردن یک یال به آن، یک دور منحصر به فرد ایجاد می‌شود.
- ۴- برای وصل کردن هر دو راس دلخواه آن، فقط یک رشته منحصر به فرد وجود دارد.

درخت فراگیر مینیمم (Minimum spanning tree)

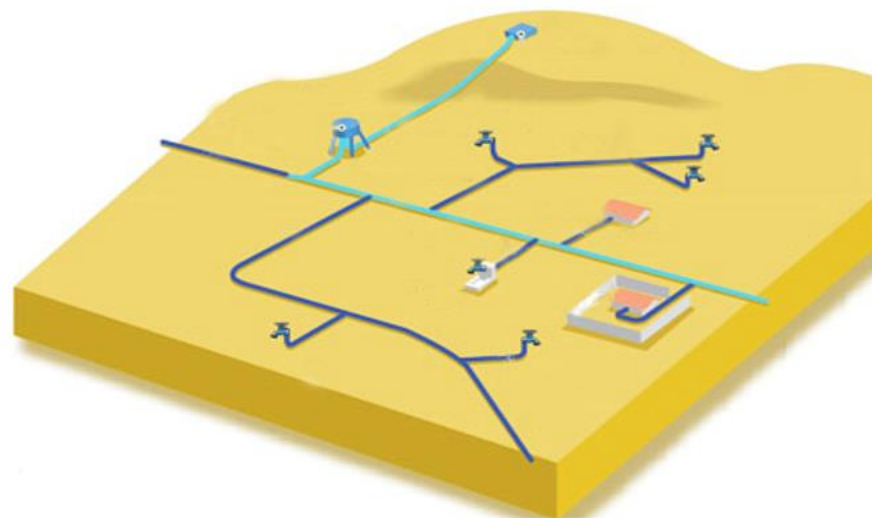
در گراف G به دنبال یافتن درختی هستیم که مجموع ظرفیت یال‌های آن کمترین مقدار ممکن باشد.



کاربردهای درخت فراگیر مینیمم

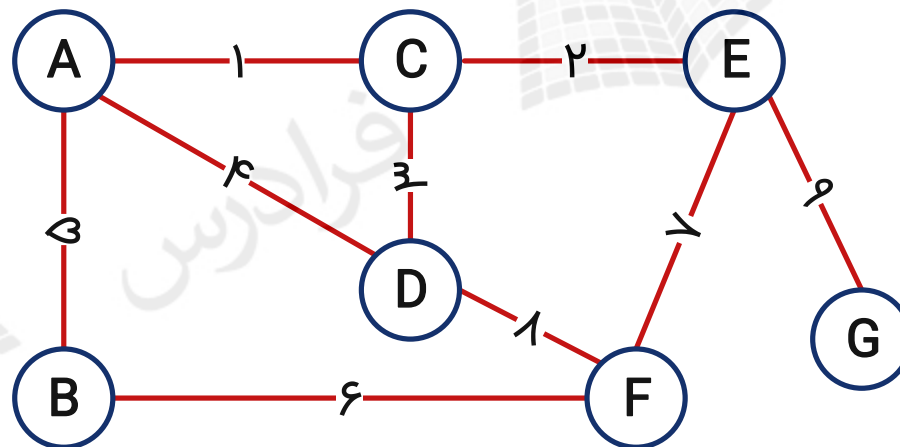


- ۱- طراحی شبکه‌های کامپیوتری
- ۲- طراحی شبکه‌های مخابراتی
- ۳- طراحی شبکه‌های حمل و نقل
- ۴- طراحی شبکه توزیع آب
- ۵- ...

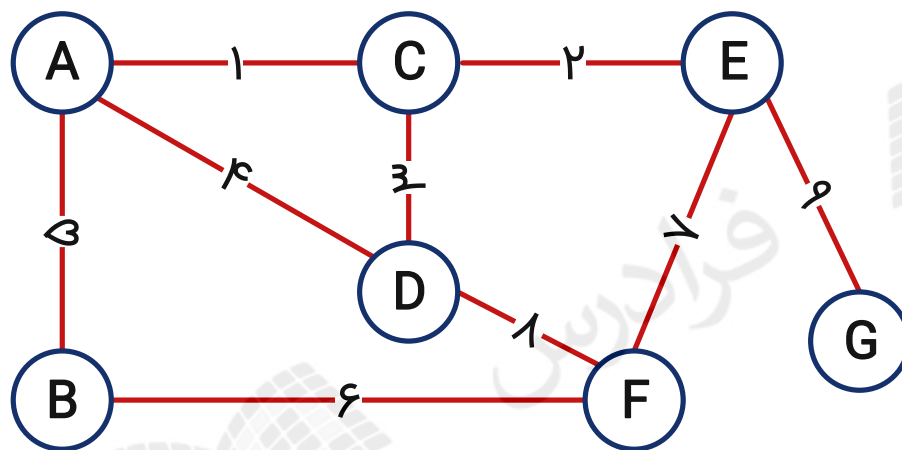


درخت فراگیر مینیم - الگوریتم کروسکال

مثال: درخت فراگیر مینیم را برای شبکه زیر به دست آورید.

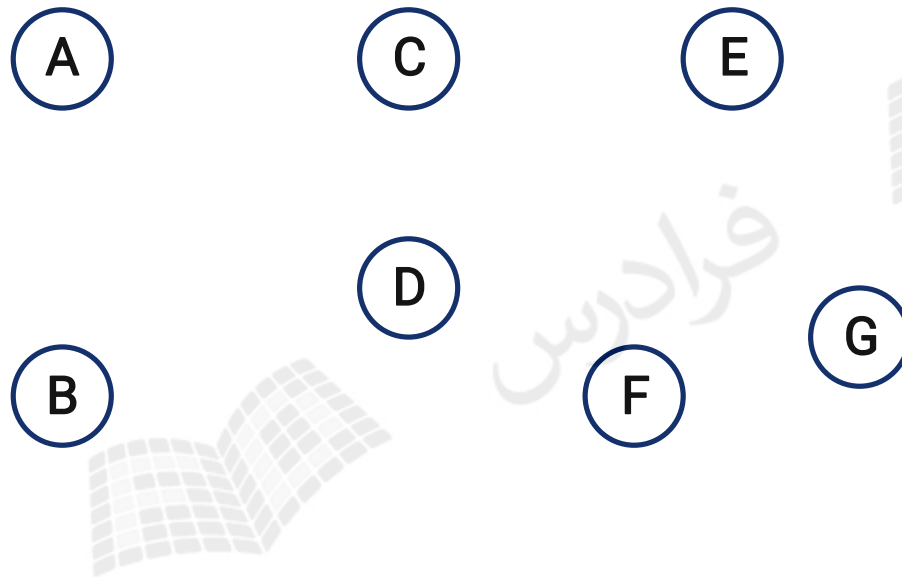


درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



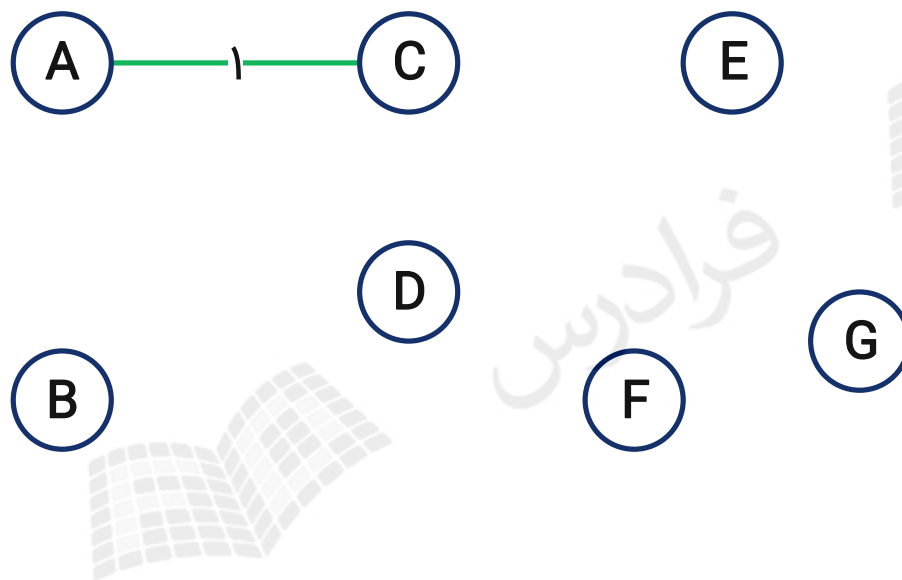
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	
CE	۲	
CD	۳	
AD	۴	
AB	۵	
BF	۶	
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



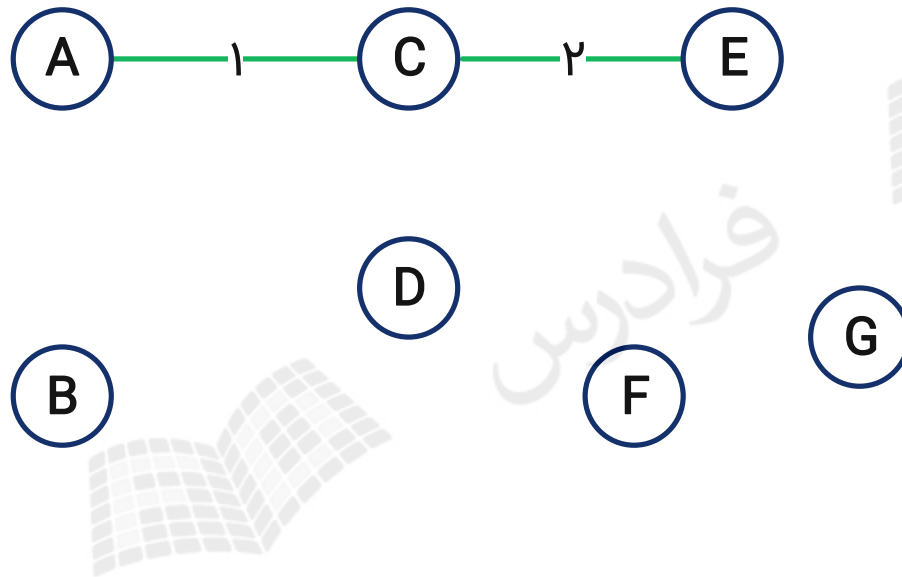
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	
CE	۲	
CD	۳	
AD	۴	
AB	۵	
BF	۶	
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



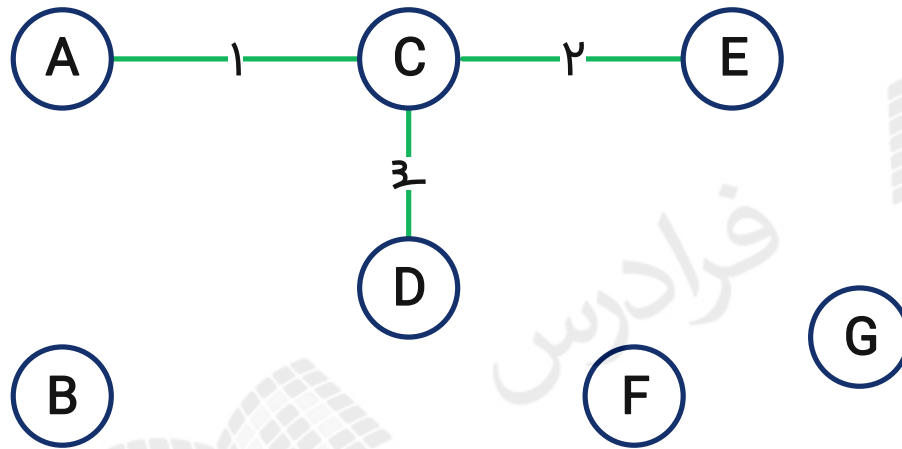
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	
CD	۳	
AD	۴	
AB	۵	
BF	۶	
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



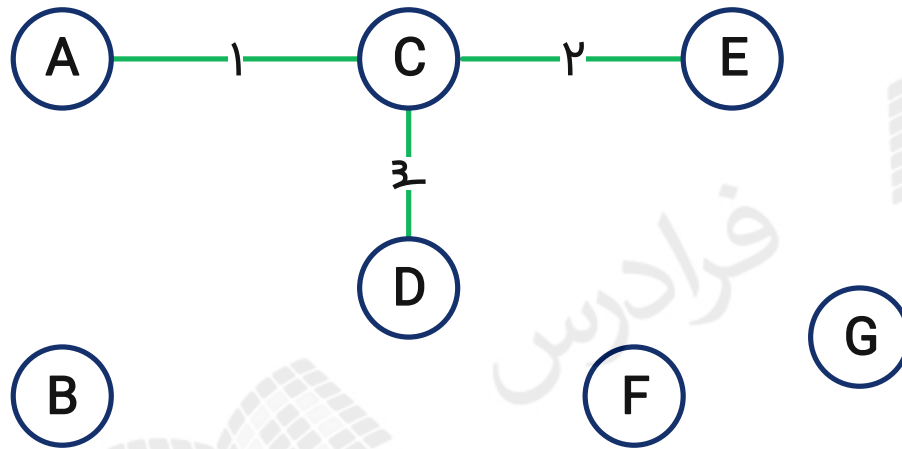
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	
AD	۴	
AB	۵	
BF	۶	
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



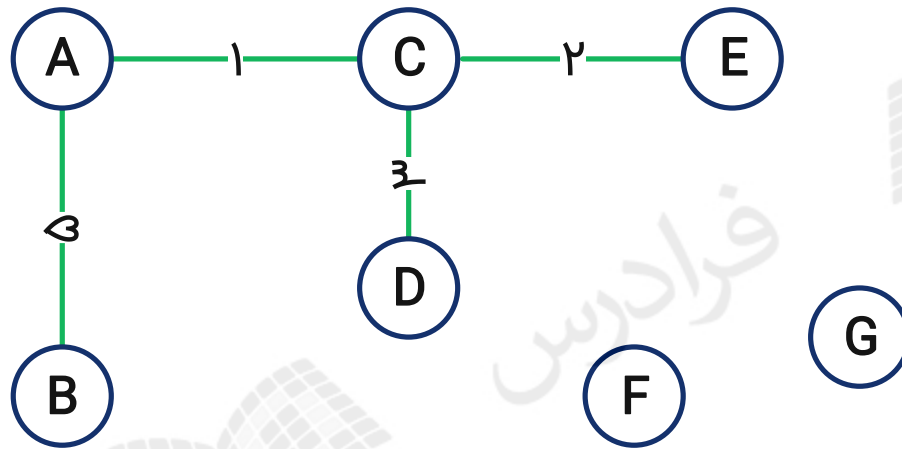
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	✓
AD	۴	
AB	۵	
BF	۶	
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



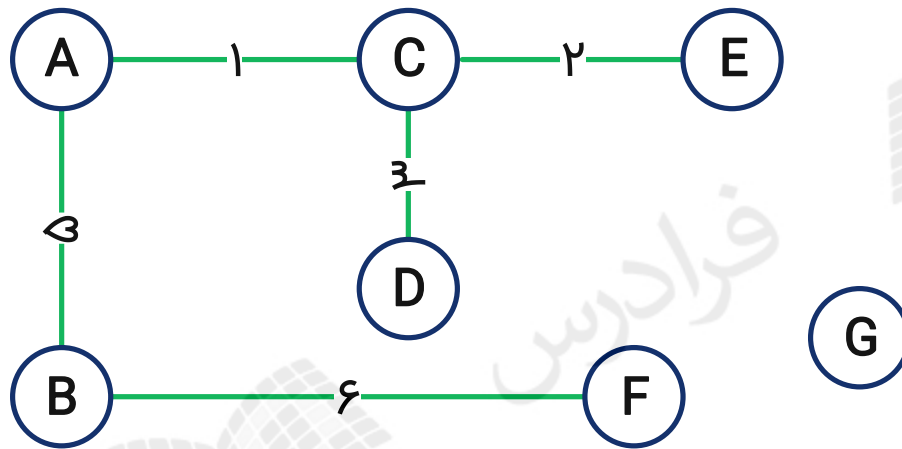
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	✓
AD	۴	✗
AB	۵	
BF	۶	
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیم - الگوریتم کروسکال



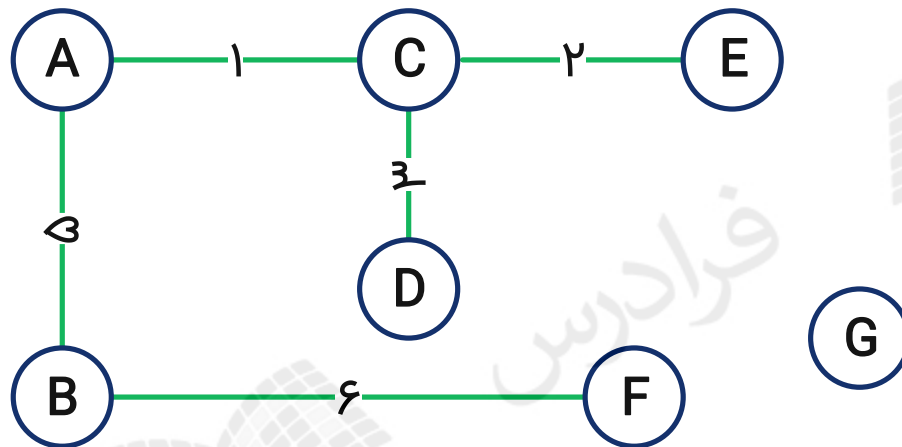
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	✓
AD	۴	✗
AB	۵	✓
BF	۶	
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



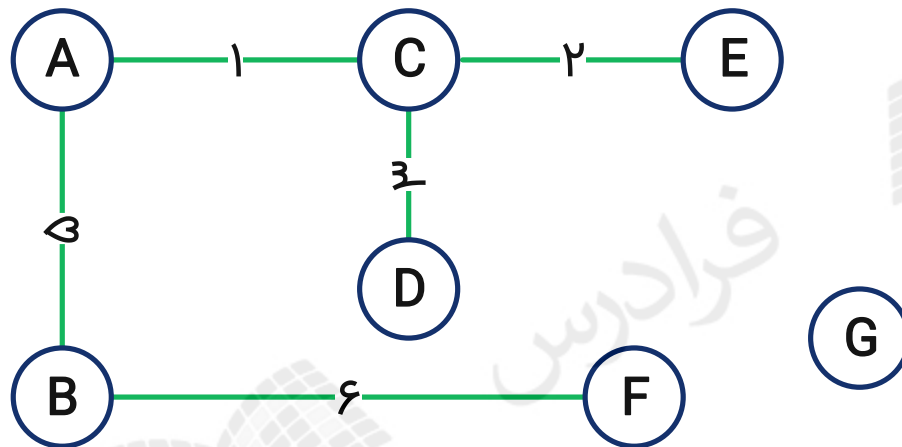
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	✓
AD	۴	✗
AB	۵	✓
BF	۶	✓
EF	۷	
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



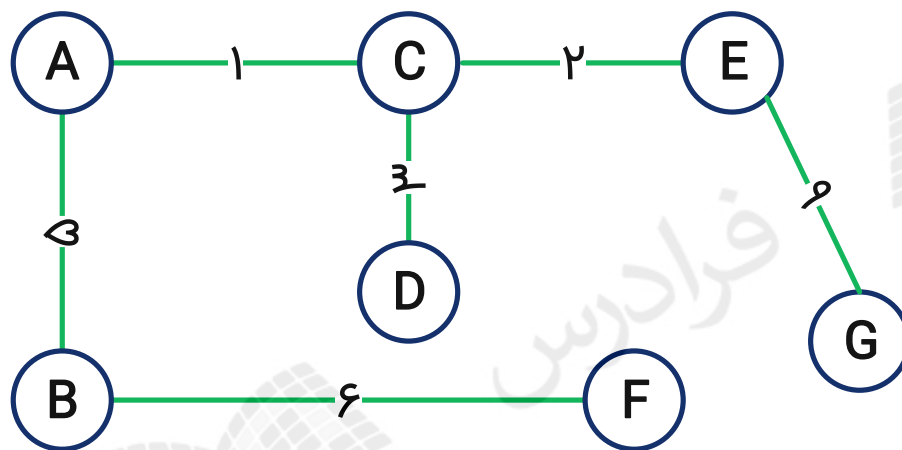
یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	✓
AD	۴	✗
AB	۵	✓
BF	۶	✓
EF	۷	✗
DF	۸	
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	✓
AD	۴	✗
AB	۵	✓
BF	۶	✓
EF	۷	✗
DF	۸	✗
EG	۹	

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال



مجموع وزن یال‌های درخت: ۲۶

یال	ظرفیت	استفاده
AC	۱	✓
CE	۲	✓
CD	۳	✓
AD	۴	✗
AB	۵	✓
BF	۶	✓
EF	۷	✗
DF	۸	✗
EG	۹	✓

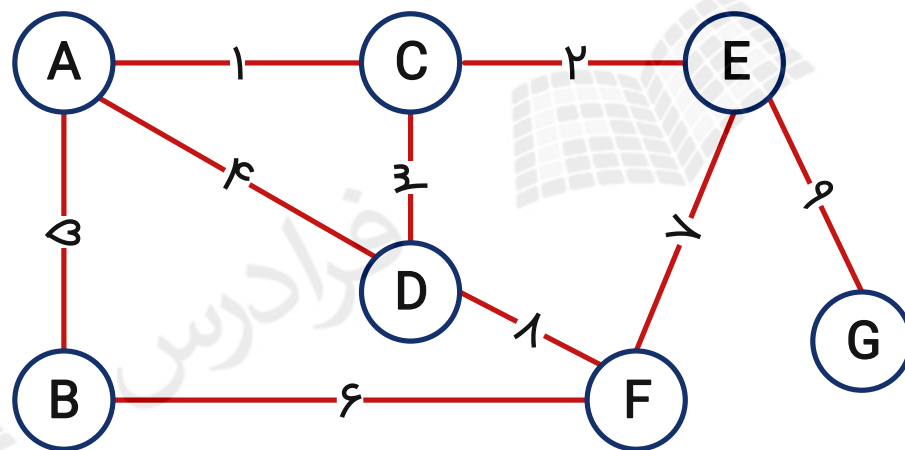
درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم کروسکال (Kruskal)

گام‌های الگوریتم برای گراف با m راس:

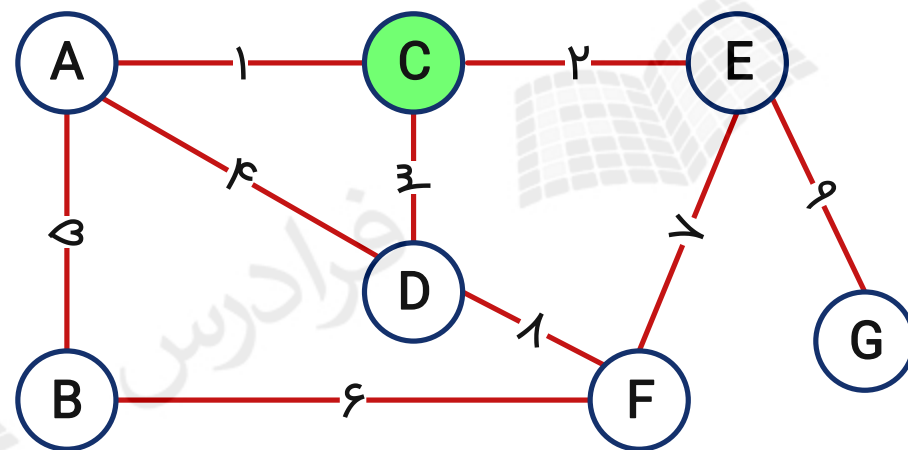
گام ۱	❖ تمام یال‌های گراف G را حذف کرده و فقط رئوس را نگه دارید. مجموعه این رئوس را T بنامید. ❖ یال‌ها را بر اساس ظرفیت آن‌ها به صورت صعودی رتبه‌بندی و لیست کنید.
گام ۲	❖ یال دارای رتبه ۱ را به مجموعه رئوس T اضافه کنید و $i = 1$ قرار دهید.
گام ۳	❖ از بین یال‌های باقی‌مانده در لیست، یال بعدی را انتخاب و به T اضافه کنید. اگر در T حلقه تشکیل شد، یال موردنظر را حذف کرده و سراغ یال بعدی در لیست رتبه‌بندی بروید. ❖ اگر یال جدید حلقه تشکیل نداد، $i = i + 1$ قرار دهید و سراغ یال بعدی بروید.
گام ۴	❖ اگر $i = m - 1$ شد، توقف کنید چون درخت تشکیل شده است. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم

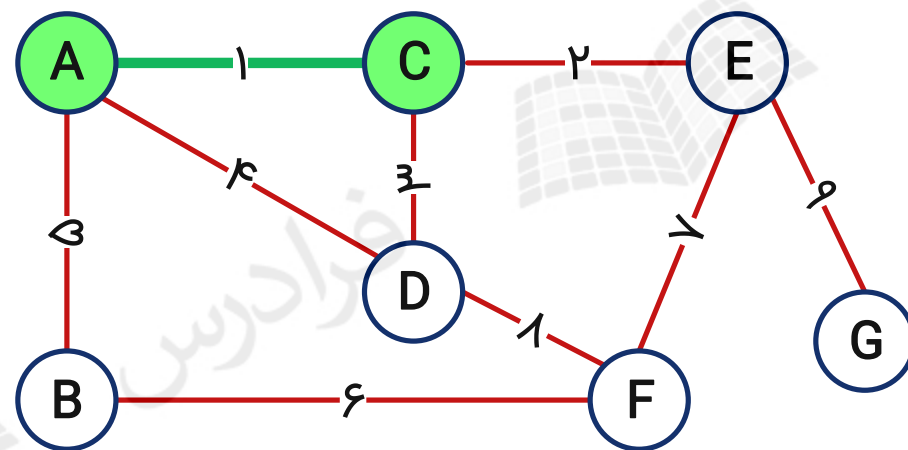
مثال: درخت فراگیر مینیمم را برای شبکه زیر به دست آورید.



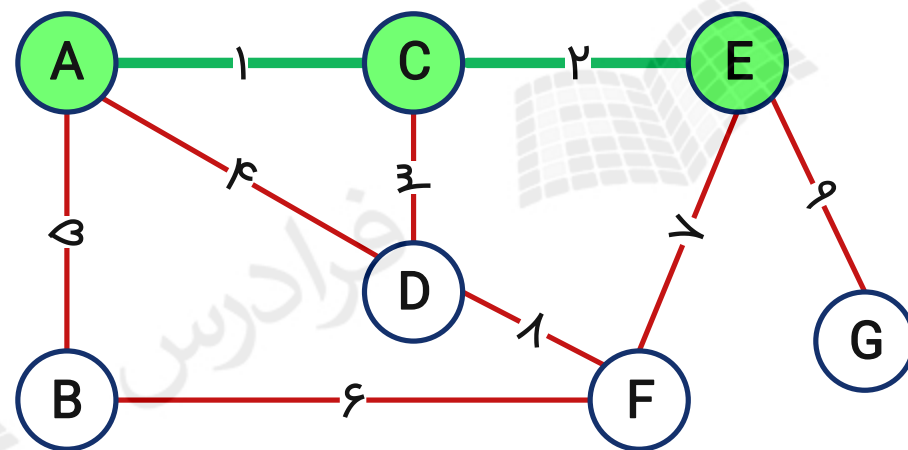
درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم



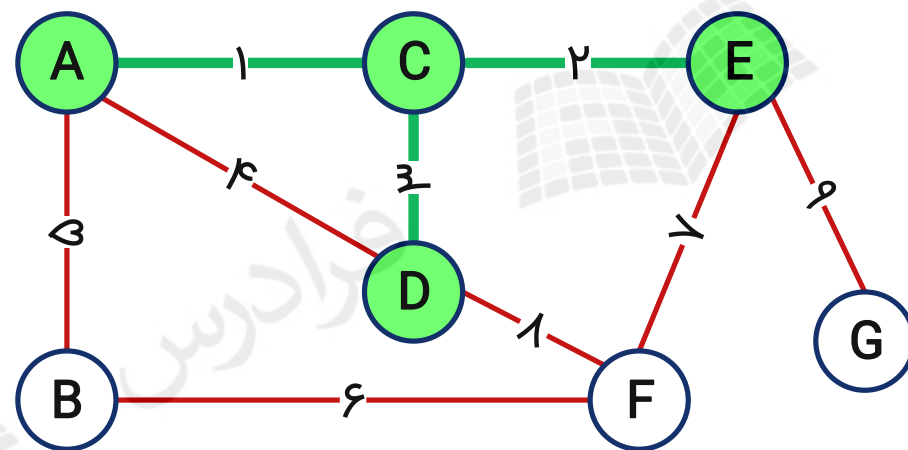
درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم



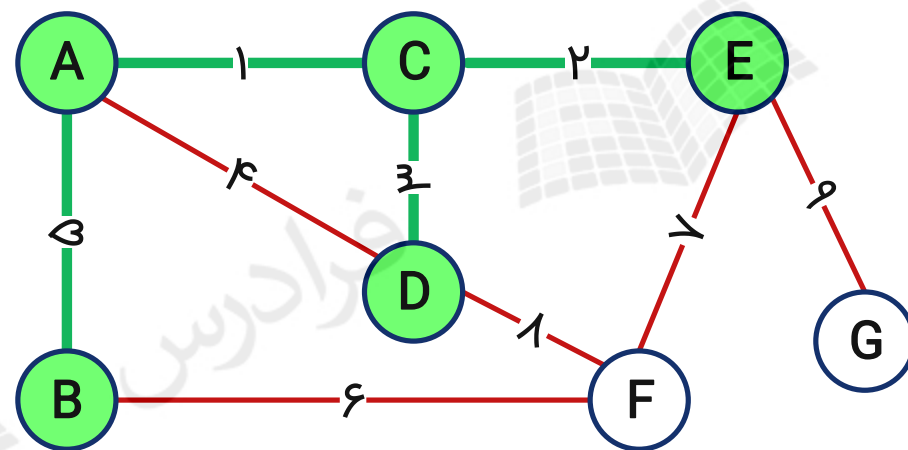
درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم



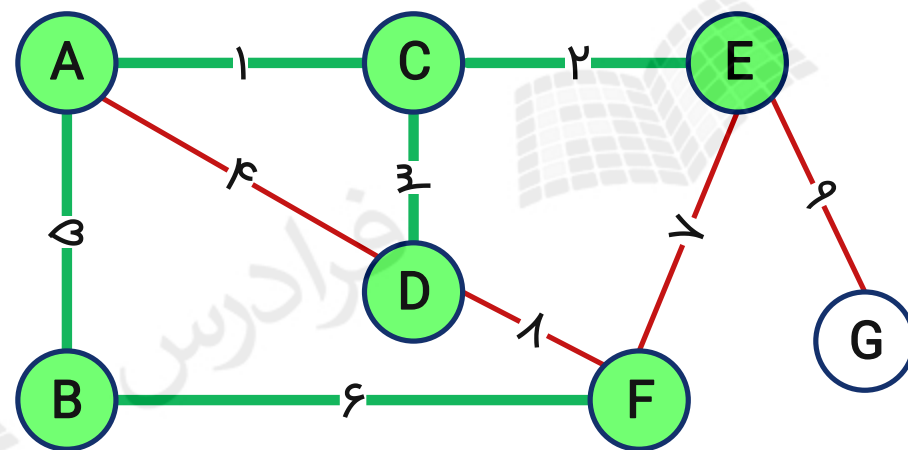
درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم



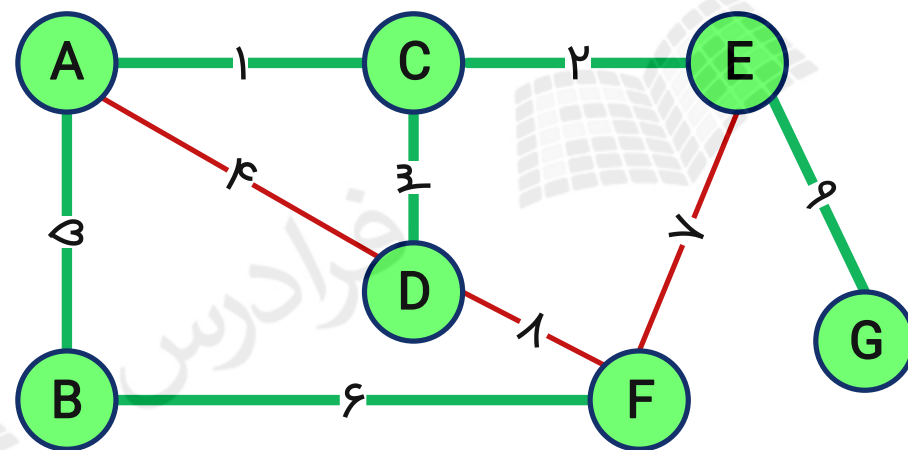
درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم



درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم



درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم



مجموع وزن یال‌های درخت: ۲۶

درخت فراگیر مینیمم - الگوریتم پرایم (Prim)

گام‌های الگوریتم برای گراف با m راس:

گام ۱

❖ یک راس گراف G را به دلخواه انتخاب کنید. این گره را به تنهایی درخت T بنامید.

گام ۲

❖ از میان تمام یال‌های متصل به درخت T (در گراف G)، یال با کمترین ظرفیت و راس متصل به آن را انتخاب کنید. درخت قبلی همراه با راس و یال جدید، درخت جدید T را تشکیل می‌دهند.

❖ در صورتی که راس متصل به یک یال قبلاً انتخاب شده باشد، یال موردنظر را نباید انتخاب کرد.

گام ۳

❖ اگر همه رئوس به هم متصل شده‌اند توقف کنید. درخت T همان درخت فراگیر مینیمم است.

❖ در غیر این صورت به گام ۲ برگردید.

سیمپلکس شبکه

یادآوری: جدول
سیمپلکس مسایل LP

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
	0	0	2.5	7.5	15	0	75
x_1	1	0	1	1	0	0	4
x_2	0	1	0.25	-0.25	0.5	0	0.5
s_3	0	0	0.75	-0.75	-0.5	1	1.5

سیمپلکس شبکه

گام‌های الگوریتم:

گام ۱	❖ یک جواب پایه‌ای شدنی (درخت ریشه‌دار شدنی) به دست آورید.
گام ۲	❖ مقدار متغیرهای دوگان رؤوس درخت را به دست آورید. مقدار متغیر دوگان راس متصل به ریشه همواره صفر است. ❖ $Z_{ij} - C_{ij}$ متغیرهای غیرپایه‌ای را به دست آورید. ❖ اگر تمام $Z_{ij} - C_{ij}$ ها غیرمثبت بودند، توقف کنید. جواب فعلی، جواب بهینه است. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.
گام ۳	❖ مثبت‌ترین $Z_{ij} - C_{ij}$ را به عنوان متغیر ورودی (یال واردشونده) انتخاب نمایید. ❖ با اضافه کردن متغیر ورودی به درخت، یک دور به وجود می‌آید. پس یک یال باید حذف شود.

سیمپلکس شبکه

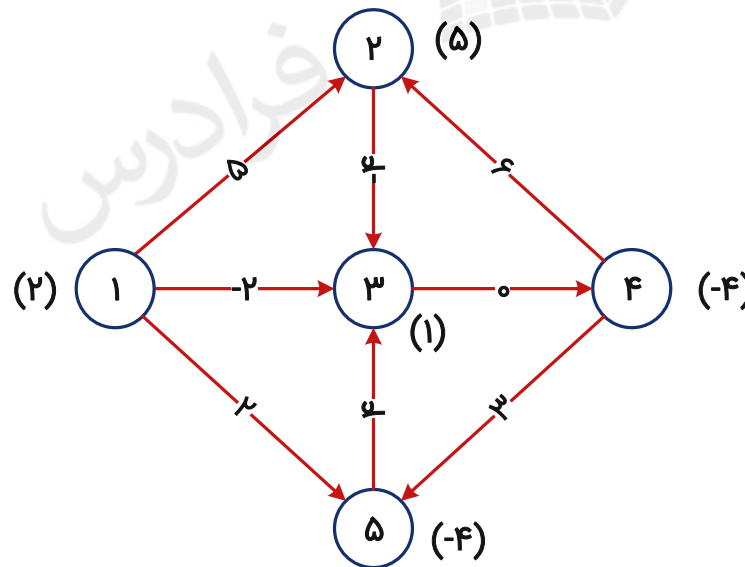
- ❖ در دور ایجاد شده، یک حلقه هم جهت با یال واردشونده متصور شوید. کمترین مقدار جریان یال‌های خلاف جهت حلقه را مشخص نمایید. این مقدار را به جریان یال‌های هم جهت با حلقه اضافه و از یال‌های خلاف جهت حلقه کم کنید.
- ❖ یال با جریان صفر را از درخت حذف نمایید. بدین ترتیب متغیر واردشونده مشخص شده است.
- ❖ به گام ۲ برگردید.

گام ۴

سیمپلکس شبکه



مثال: به دنبال توزیع محصول از کارخانه (مبادی) به بازار فروش (مقاصد) هستیم. فرض کنید تعداد کل واحدهای محصول تولید شده در هر کارخانه و تعداد کل محصول موردنیاز معلوم است. همچنین لازم نیست که محصول مستقیماً به مقاصد ارسال شود بلکه امکان دارد که از طریق سایر نقاط به مراکز توزیع ارسال شود. هدف، کمینه کردن هزینه حمل محصول است.



سیمپلکس شبکه - مدل مساله

$$\text{Min } Z = 5x_{12} - 2x_{13} + 2x_{15} - 4x_{23} + 6x_{42} + 3x_{45} + 4x_{53}$$

s.t.

$$(1) x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2$$

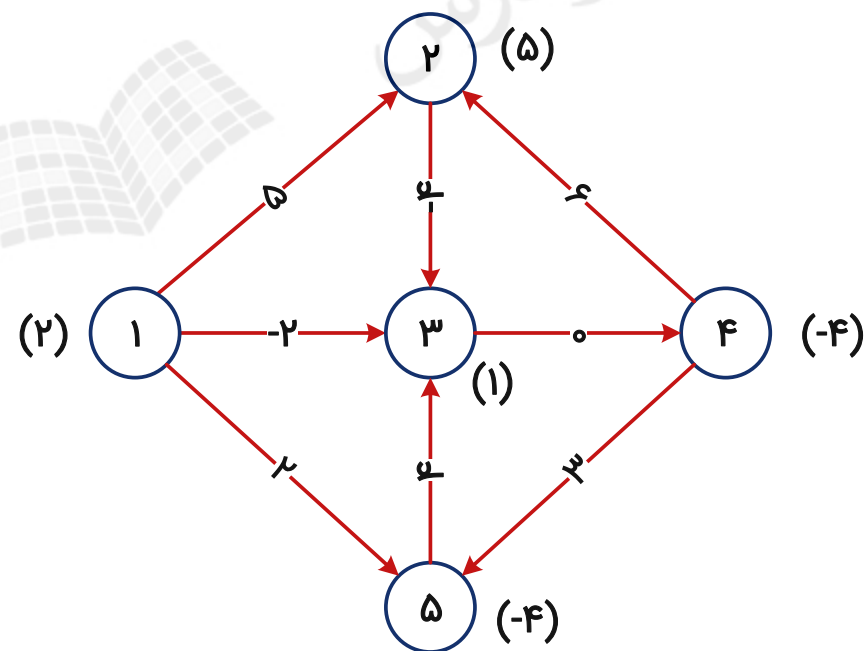
$$(2) -x_{12} + x_{23} - x_{42} = 5$$

$$(3) -x_{13} - x_{23} + x_{34} - x_{53} = 1$$

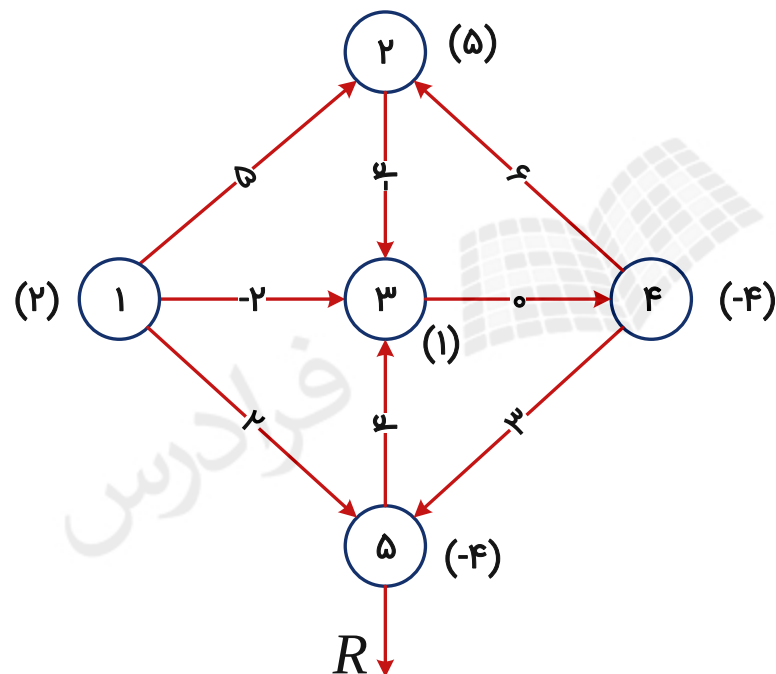
$$(4) -x_{34} + x_{42} + x_{45} = -4$$

$$(5) -x_{15} - x_{45} + x_{53} = -4$$

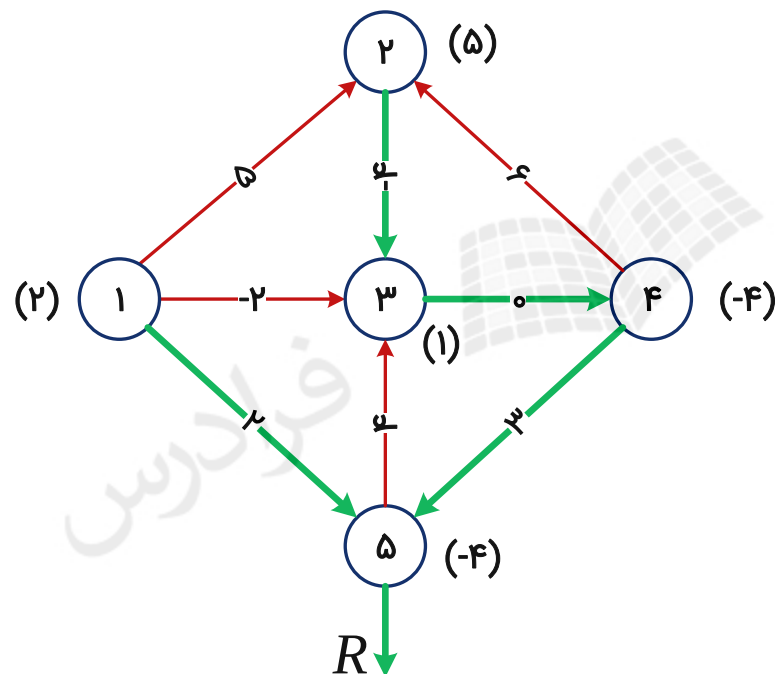
$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$



سیمپلکس شبکه - یافتن جواب پایه‌ای آغازین



سیمپلکس شبکه - یافتن جواب پایه‌ای آغازین



سیمپلکس شبکه - یافتن جواب پایه‌ای آغازین

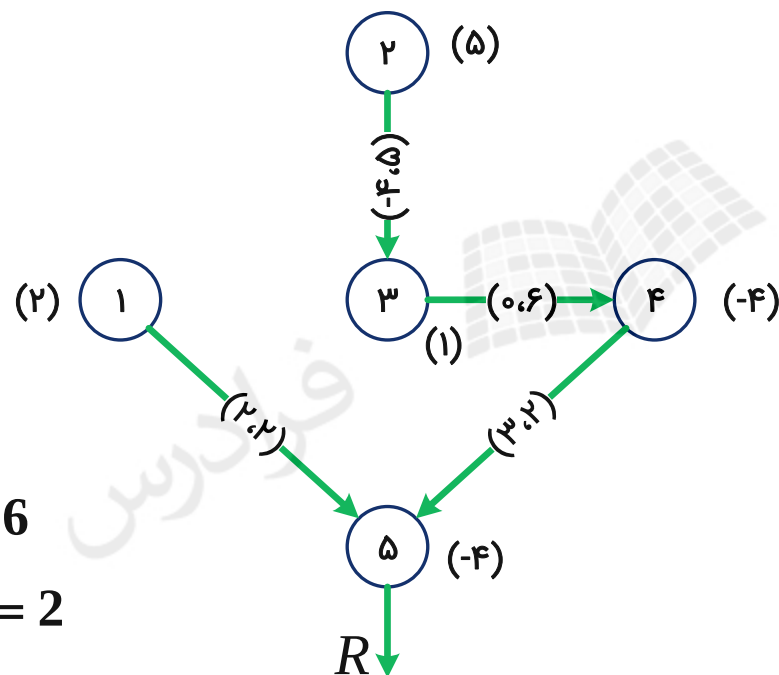
$$x_{23} = 5$$

$$x_{15} = 2$$

$$x_{34} - x_{23} = 1 \Rightarrow x_{34} = 6$$

$$x_{45} - x_{34} = -4 \Rightarrow x_{45} = 2$$

$$R - x_{15} - x_{45} = -4 \Rightarrow R = 0$$



سیمپلکس شبکه - یافتن متغیرهای دوگان

$$w_5 = 0$$

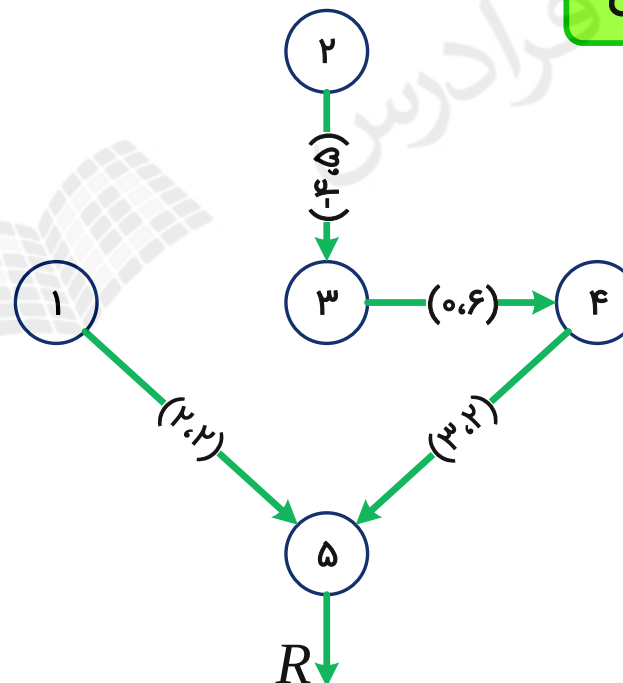
$$z_{45} - c_{45} = 0 \Rightarrow w_4 - \overset{0}{\cancel{w_5}} - \overset{3}{\cancel{c_{45}}} = 0 \Rightarrow w_4 = 3$$

$$z_{15} - c_{15} = 0 \Rightarrow w_1 - \overset{0}{\cancel{w_5}} - \overset{2}{\cancel{c_{15}}} = 0 \Rightarrow w_1 = 2$$

$$z_{34} - c_{34} = 0 \Rightarrow w_3 - \overset{3}{\cancel{w_4}} - \overset{0}{\cancel{c_{34}}} = 0 \Rightarrow w_3 = 3$$

$$z_{23} - c_{23} = 0 \Rightarrow w_2 - \overset{3}{\cancel{w_3}} - \overset{-4}{\cancel{c_{23}}} = 0 \Rightarrow w_2 = -1$$

تکرار اول



سیمپلکس شبکه - تعیین متغیر واردشونده

$$z_{12} - c_{12} = w_1 - w_2 - c_{12} = -2$$

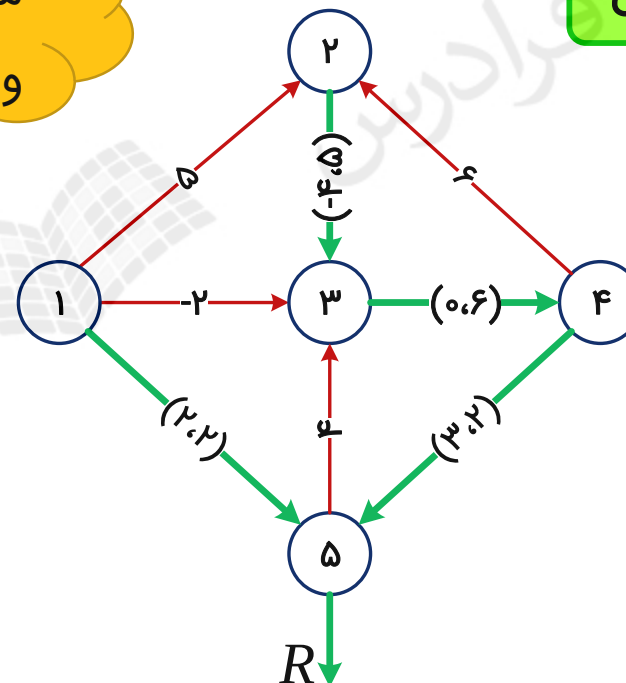
$$z_{13} - c_{13} = w_1 - w_3 - c_{13} = 1$$

$$z_{42} - c_{42} = w_4 - w_2 - c_{42} = -2$$

$$z_{53} - c_{53} = w_5 - w_3 - c_{53} = -7$$

متغیر
واردشونده: x_{13}

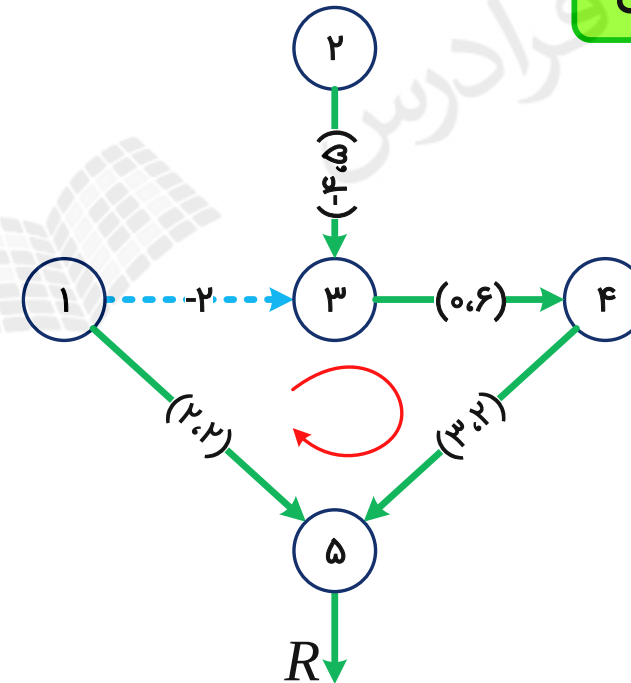
تکرار اول



سیمپلکس شبکه - تعیین متغیر خارج شونده

تکرار اول

$$\min\{x_{15}\} = \min\{2\} = 2$$



سیمپلکس شبکه - یافتن متغیرهای دوگان

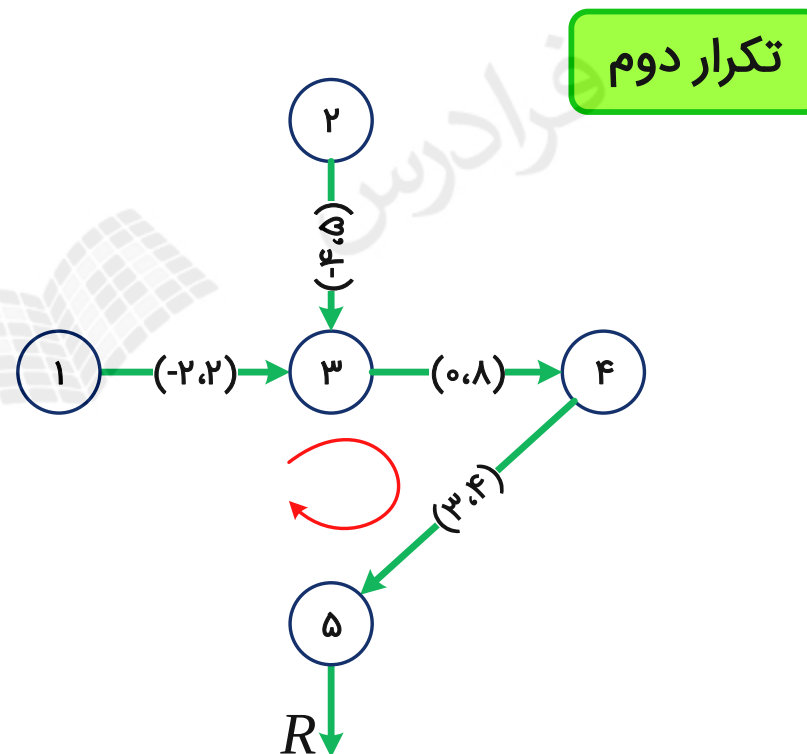
$$w_5 = 0$$

$$z_{45} - c_{45} = 0 \Rightarrow w_4 - \cancel{w_5}^0 - \cancel{c_{45}}^3 = 0 \Rightarrow w_4 = 3$$

$$z_{34} - c_{34} = 0 \Rightarrow w_3 - \cancel{w_4}^3 - \cancel{c_{34}}^0 = 0 \Rightarrow w_3 = 3$$

$$z_{23} - c_{23} = 0 \Rightarrow w_2 - \cancel{w_3}^3 - \cancel{c_{23}}^{-4} = 0 \Rightarrow w_2 = -1$$

$$z_{13} - c_{13} = 0 \Rightarrow w_1 - \cancel{w_3}^3 - \cancel{c_{13}}^{-2} = 0 \Rightarrow w_1 = 1$$



سیمپلکس شبکه - تعیین متغیر واردشونده

$$z_{12} - c_{12} = w_1 - w_2 - c_{12} = -3$$

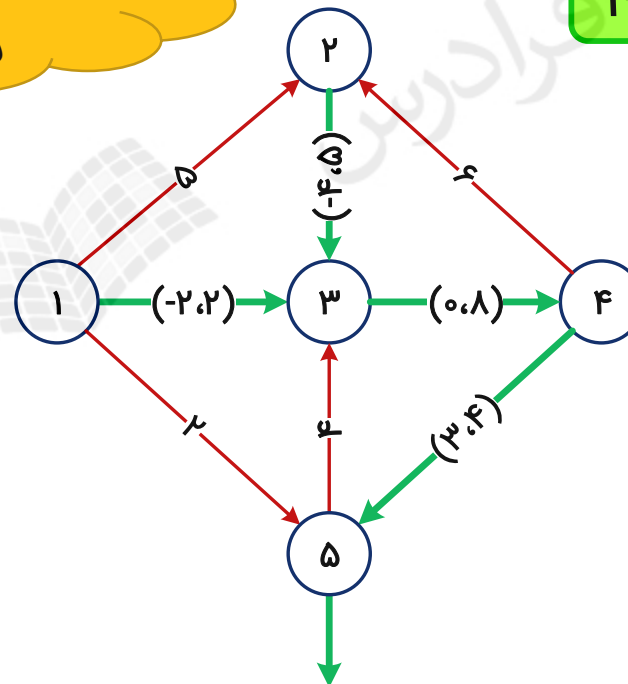
$$z_{15} - c_{15} = w_1 - w_5 - c_{15} = -1$$

$$z_{42} - c_{42} = w_4 - w_2 - c_{42} = -2$$

$$z_{53} - c_{53} = w_5 - w_3 - c_{53} = -7$$

متغیر واردشونده
نداریم.

تکرار دوم

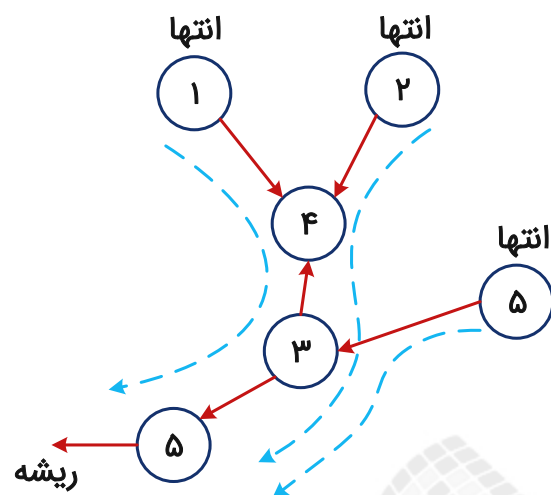


جواب بهینه

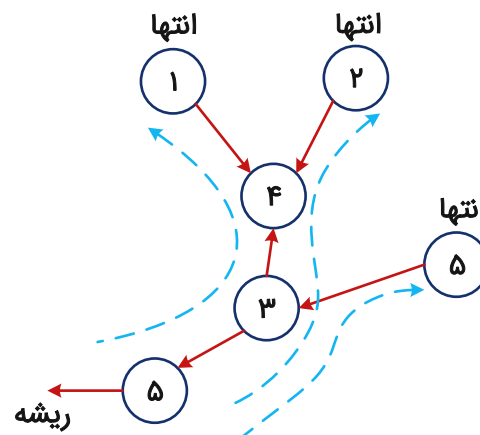
$$\begin{cases} x_{13}^* = 2 \\ x_{23}^* = 5 \\ x_{34}^* = 8 \\ x_{45}^* = 4 \\ z^* = -12 \end{cases}$$

سیمپلکس شبکه - یافتن جواب پایه‌ای آغازین

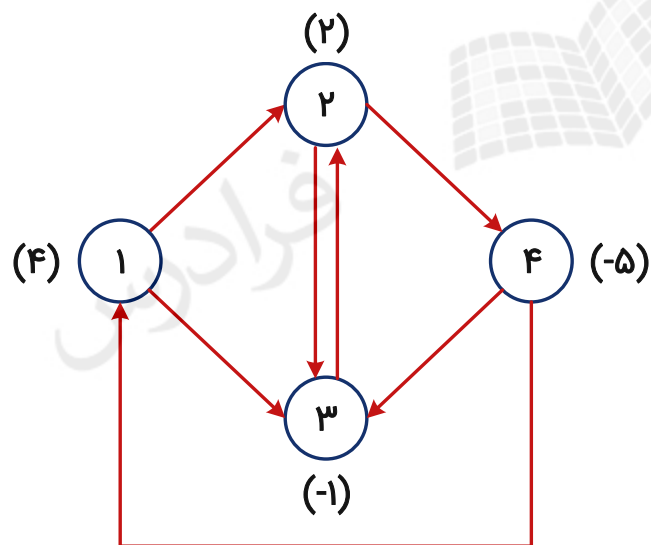
نکته: فرایند یافتن جواب پایه‌ای آغازین، از انتهای درخت به سمت ریشه می‌باشد.



نکته: فرایند یافتن متغیرهای دوگان، بر عکس حالت فوق است.

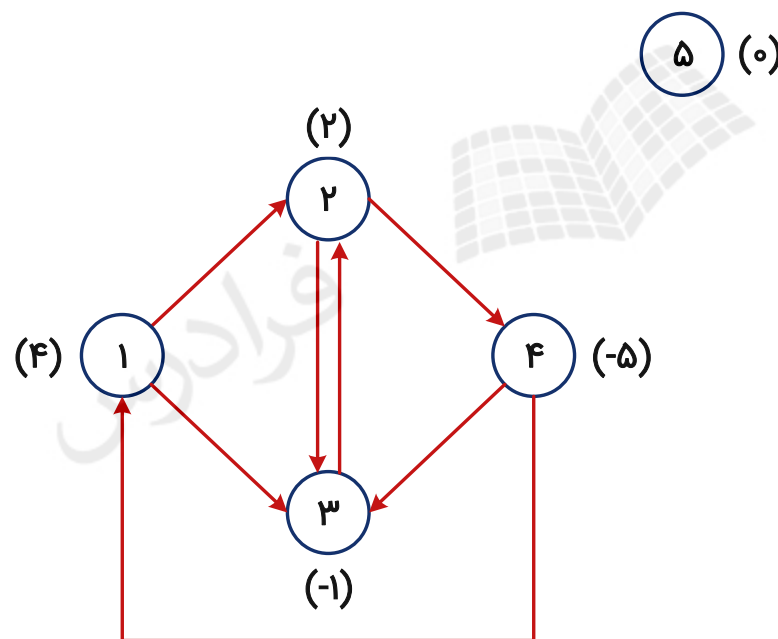


سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین



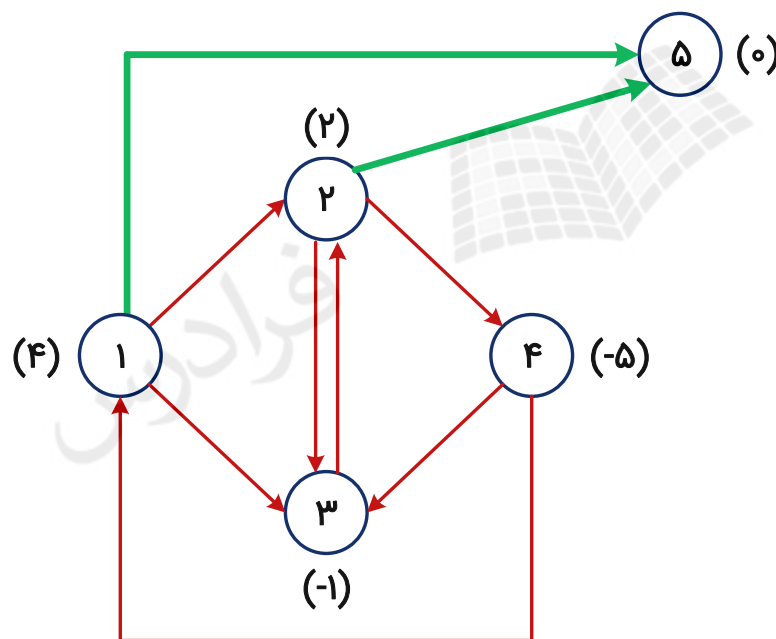
سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

محدودیت مصنوعی



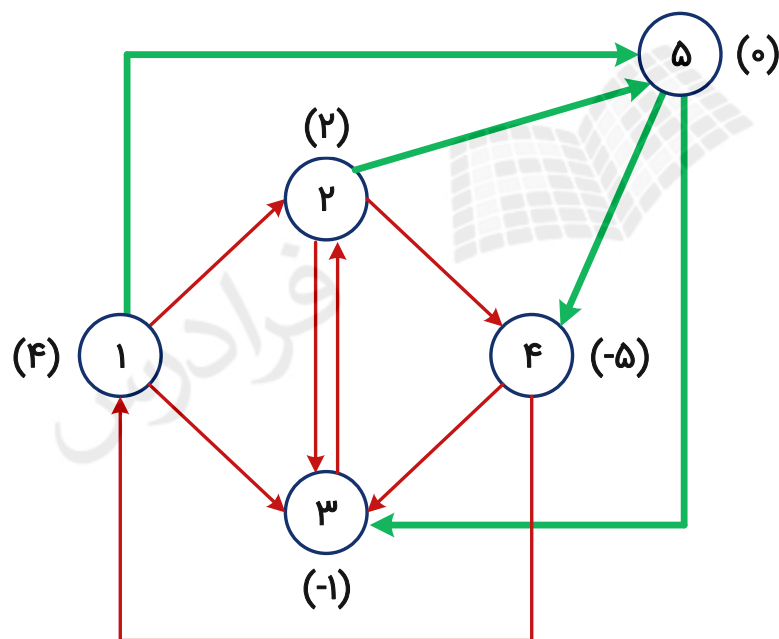
سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

متغیر مصنوعی



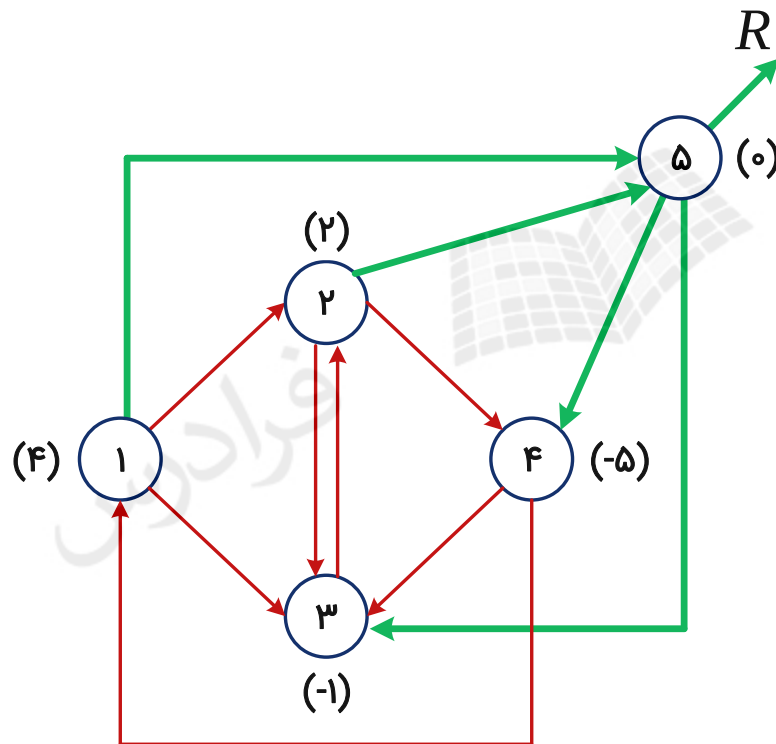
سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

متغیر مصنوعی



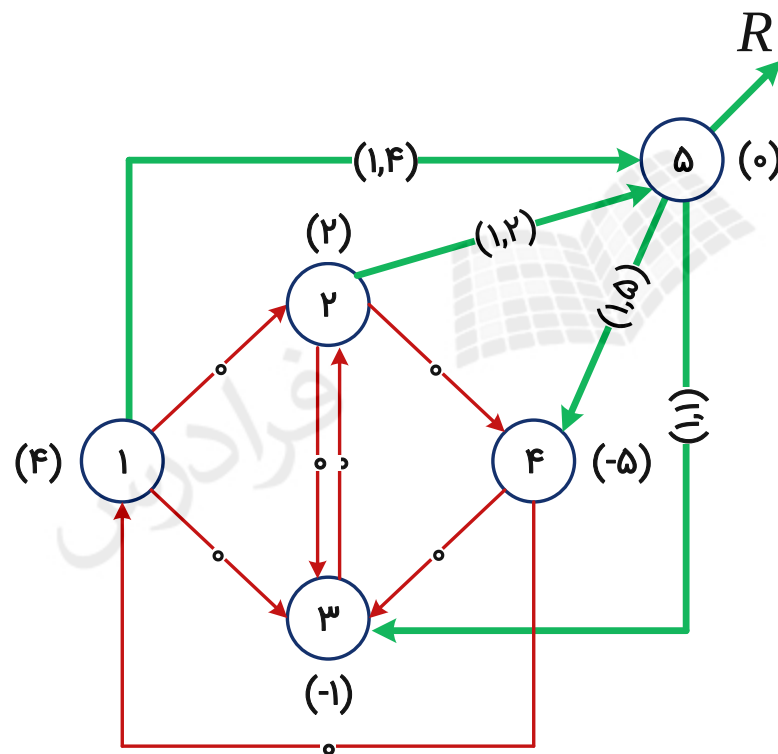
سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

متغیر مصنوعی



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

متغیر مصنوعی



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار اول

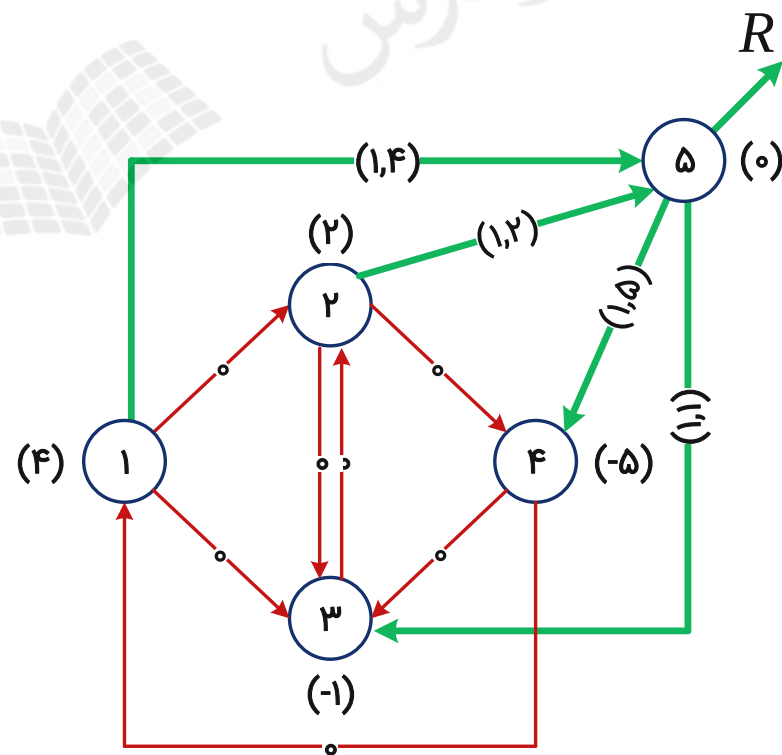
$$w_5 = 0$$

$$z_{15} - c_{15} = 0 \Rightarrow w_1 - \cancel{w_5} - \cancel{c_{15}} = 0 \Rightarrow w_1 = 1$$

$$z_{25} - c_{25} = 0 \Rightarrow w_2 - \cancel{w_5} - \cancel{c_{25}} = 0 \Rightarrow w_2 = 1$$

$$z_{53} - c_{53} = 0 \Rightarrow \cancel{w_5} - w_3 - \cancel{c_{53}} = 0 \Rightarrow w_3 = -1$$

$$z_{54} - c_{54} = 0 \Rightarrow \cancel{w_5} - w_4 - \cancel{c_{54}} = 0 \Rightarrow w_4 = -1$$



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار اول

$$Z_{12} - C_{12} = w_1 - w_2 - c_{12} = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$Z_{13} - C_{13} = w_1 - w_3 - c_{13} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$Z_{24} - C_{24} = w_2 - w_4 - c_{24} = 1 + 1 - 0 = 2$$

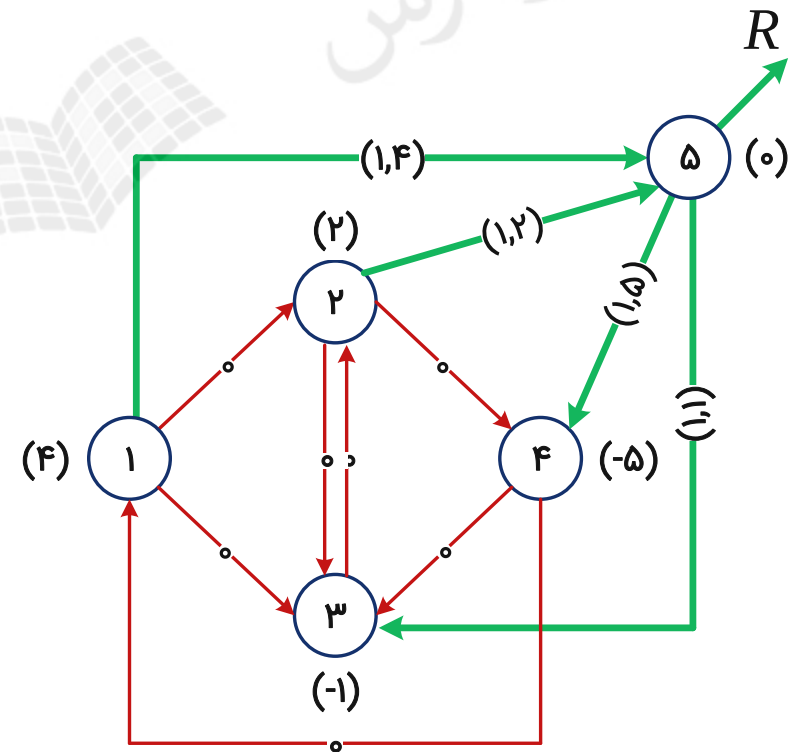
$$Z_{23} - C_{23} = w_2 - w_3 - c_{23} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$Z_{32} - C_{32} = w_3 - w_2 - c_{32} = -1 - 1 - 0 = -2$$

$$Z_{43} - C_{43} = w_4 - w_3 - c_{34} = -1 + 1 - 0 = 0$$

متغیر x_{23}

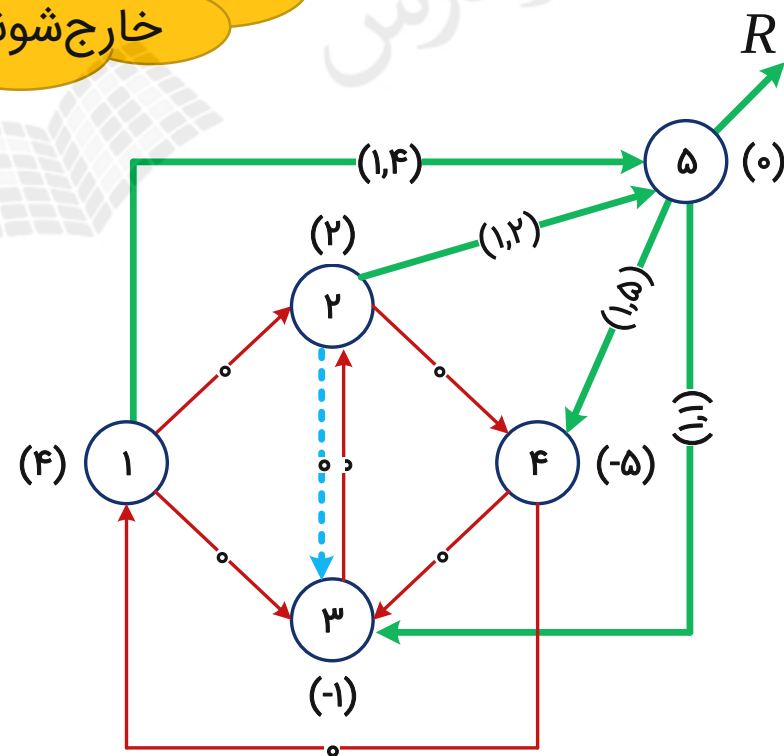
واردشونده است.



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار اول

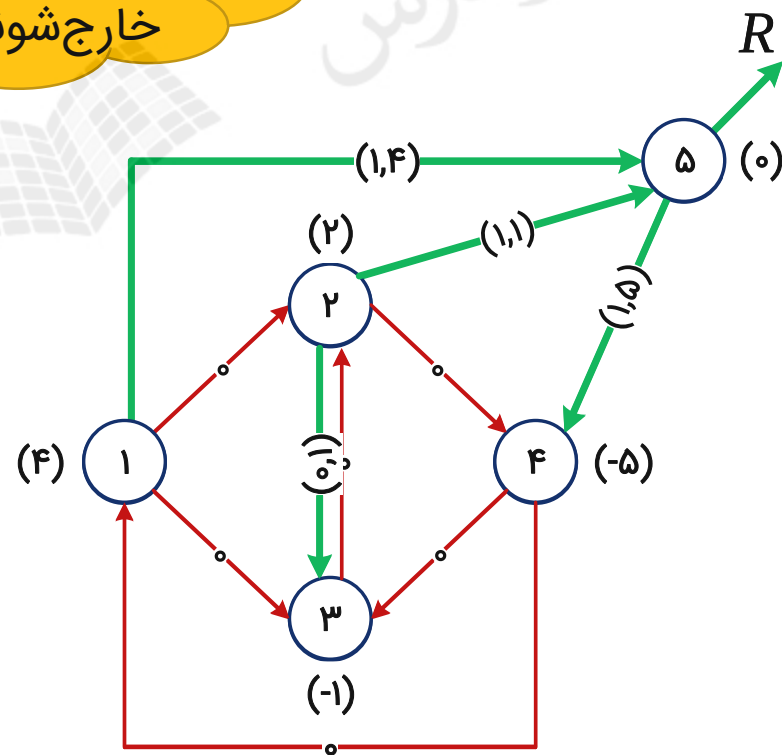
متغیر x_{53} خارج‌شونده است.
 $\min\{x_{53}, x_{25}\} = \min\{1, 2\} = 1$



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار اول

متغیر x_{53} خارج‌شونده است. $\min\{x_{53}, x_{25}\} = \min\{1, 2\} = 1$



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار دوم

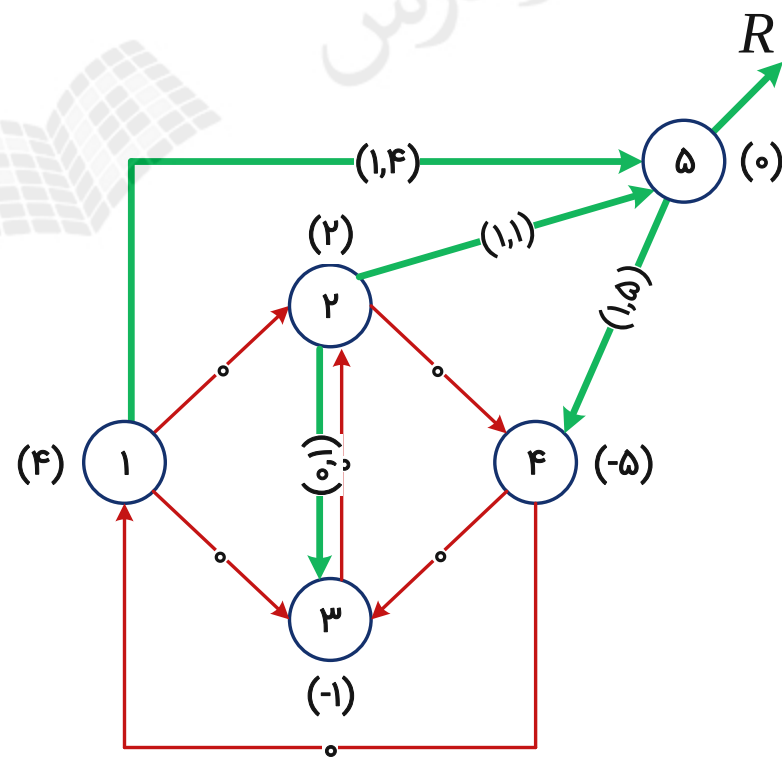
$$w_5 = 0$$

$$z_{15} - c_{15} = 0 \Rightarrow w_1 - \cancel{w_5} - \cancel{c}_{15} = 0 \Rightarrow w_1 = 1$$

$$z_{25} - c_{25} = 0 \Rightarrow w_2 - \cancel{w_5} - \cancel{c}_{25} = 0 \Rightarrow w_2 = 1$$

$$z_{23} - c_{23} = 0 \Rightarrow \cancel{w_2} - w_3 - \cancel{c}_{23} = 0 \Rightarrow w_3 = 1$$

$$z_{54} - c_{54} = 0 \Rightarrow \cancel{w_5} - w_4 - \cancel{c}_{54} = 0 \Rightarrow w_4 = -1$$



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار دوم

$$Z_{12} - C_{12} = w_1 - w_2 - c_{12} = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$Z_{13} - C_{13} = w_1 - w_3 - c_{13} = 1 - 1 - 0 = 0$$

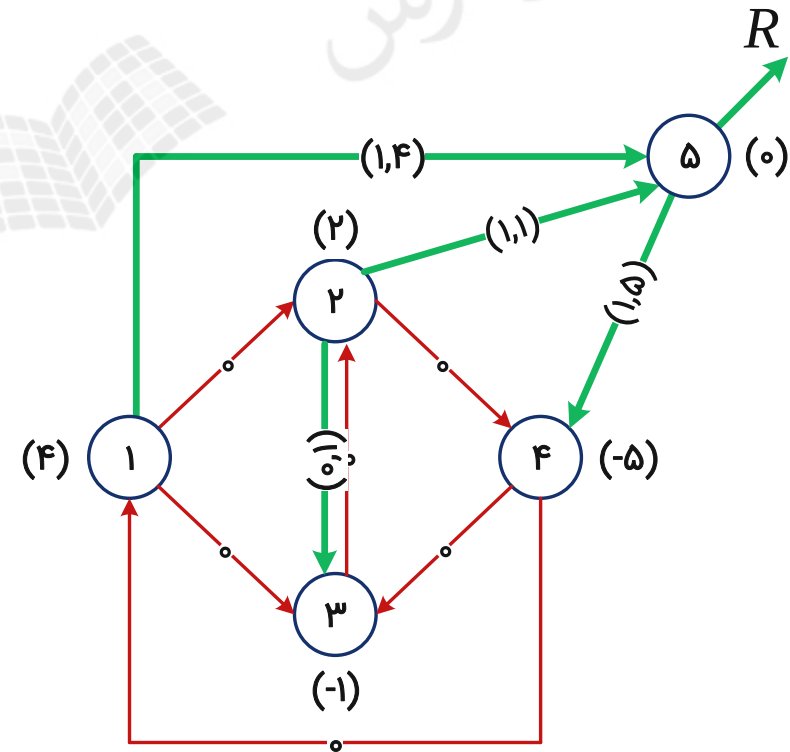
$$Z_{24} - C_{24} = w_2 - w_4 - c_{24} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$Z_{32} - C_{32} = w_3 - w_2 - c_{32} = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$Z_{43} - C_{43} = w_4 - w_3 - c_{43} = -1 - 1 - 0 = -2$$

متغیر x_{24}

واردشونده است.



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار دوم

$$Z_{12} - C_{12} = w_1 - w_2 - c_{12} = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$Z_{13} - C_{13} = w_1 - w_3 - c_{13} = 1 - 1 - 0 = 0$$

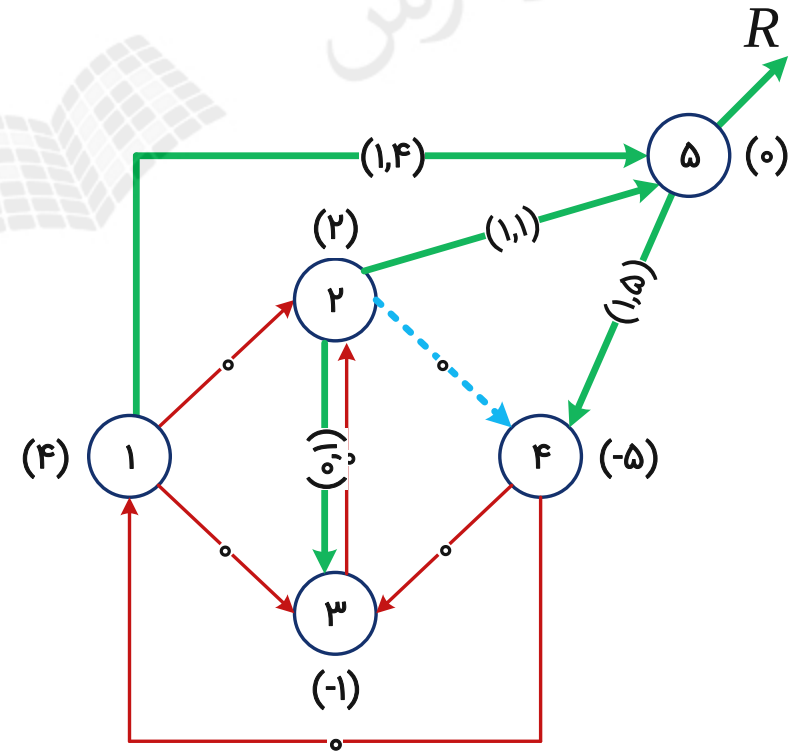
$$Z_{24} - C_{24} = w_2 - w_4 - c_{24} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$Z_{32} - C_{32} = w_3 - w_2 - c_{32} = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$Z_{43} - C_{43} = w_4 - w_3 - c_{43} = -1 - 1 - 0 = -2$$

متغیر x_{24}

واردشونده است.



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار سوم

متغیر x_{12}

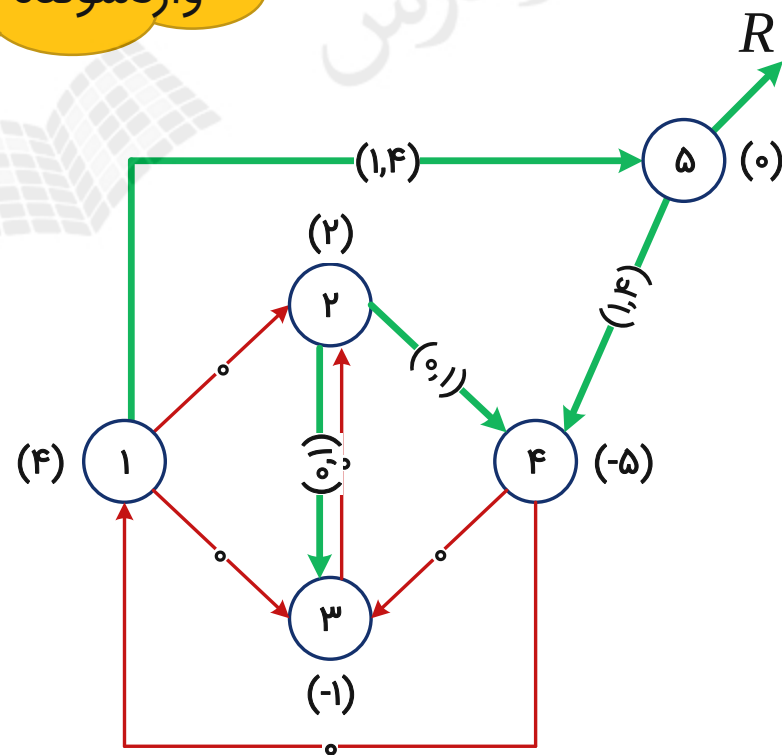
واردشونده است.

$$z_{12} - c_{12} = w_1 - w_2 - c_{12} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$z_{13} - c_{13} = w_1 - w_3 - c_{13} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$z_{32} - c_{32} = w_3 - w_2 - c_{32} = -1 + 1 - 0 = 0$$

$$z_{43} - c_{43} = w_4 - w_3 - c_{34} = -1 + 1 - 0 = 0$$



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار سوم

متغیر x_{12}

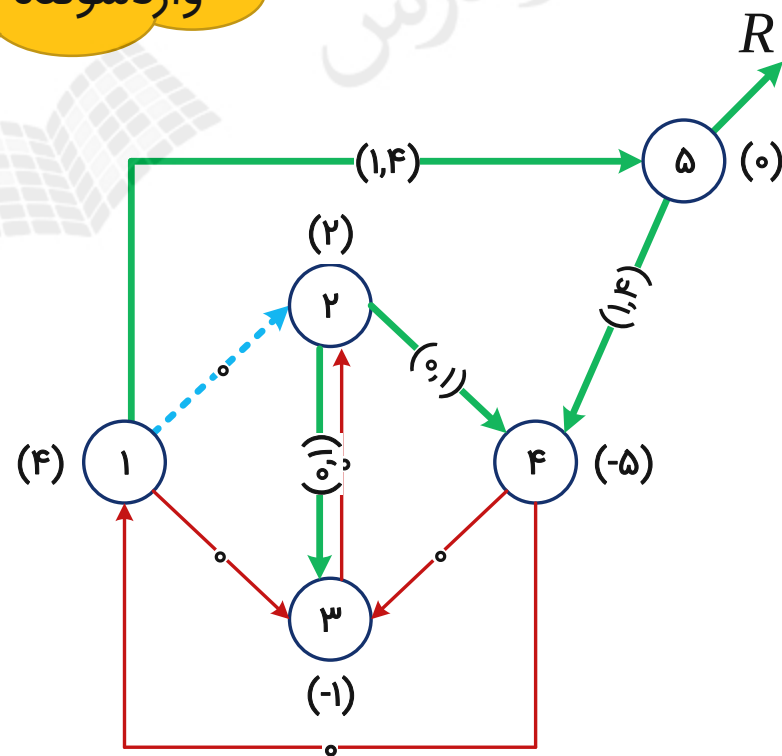
واردشونده است.

$$z_{12} - c_{12} = w_1 - w_2 - c_{12} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$z_{13} - c_{13} = w_1 - w_3 - c_{13} = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$z_{32} - c_{32} = w_3 - w_2 - c_{32} = -1 + 1 - 0 = 0$$

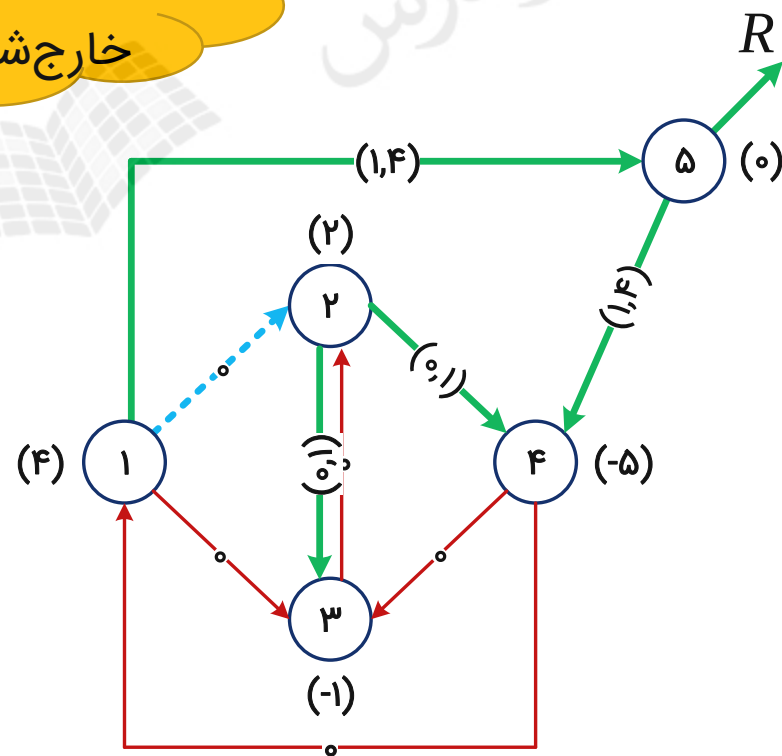
$$z_{43} - c_{43} = w_4 - w_3 - c_{34} = -1 + 1 - 0 = 0$$



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

تکرار سوم

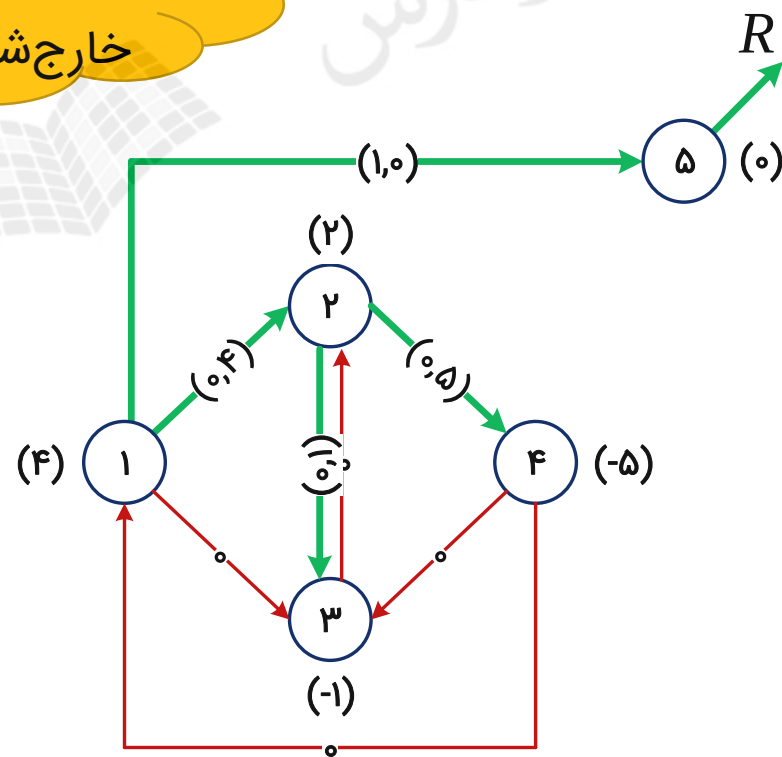
متغیر x_{54} خارج‌شونده است.
 $\min\{x_{54}, x_{15}\} = \min\{4, 4\} = 4$



سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

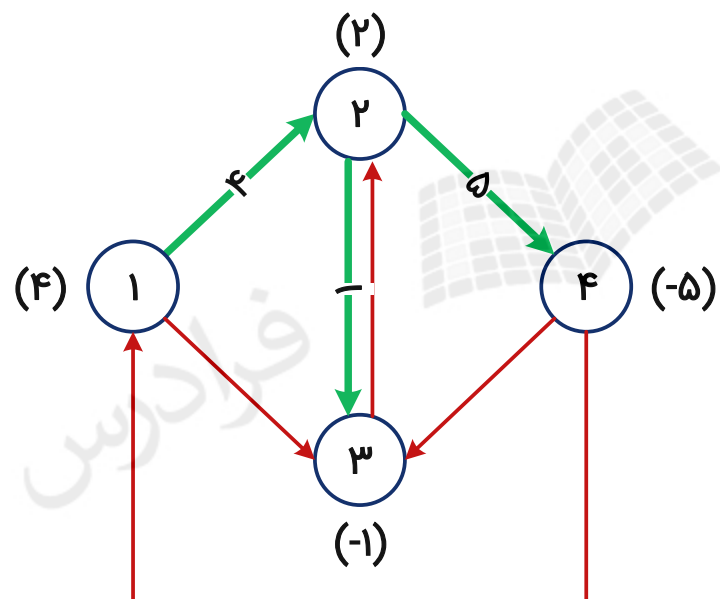
تکرار سوم

متغیر x_{54} خارج‌شونده است.
 $\min\{x_{54}, x_{15}\} = \min\{4, 4\} = 4$



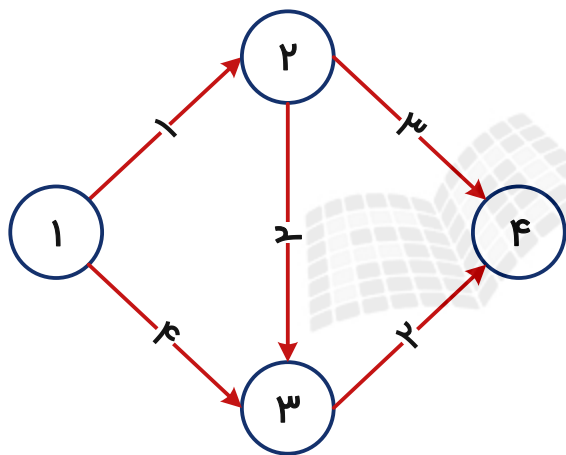
سیمپلکس شبکه - الگوریتم یافتن جواب پایه‌ای آغازین

جواب اولیه شدنی



مساله حداکثر جریان

- شبکه‌ای با m راس و n یال
- یک کالا در طول شبکه در جریان است.
- جریان عبوری از هر یال (i, j) یا همان ظرفیت یال دارای کران بالا u_{ij} می‌باشد.
- ظرفیت هر یال، یک عدد صحیح متناهی است.
- هیچ هزینه‌ای وجود ندارد.
- هدف: حداکثر کردن جریان عبوری (f) از راس ۱ به راس m



مساله حداکثر جریان - مدل سازی

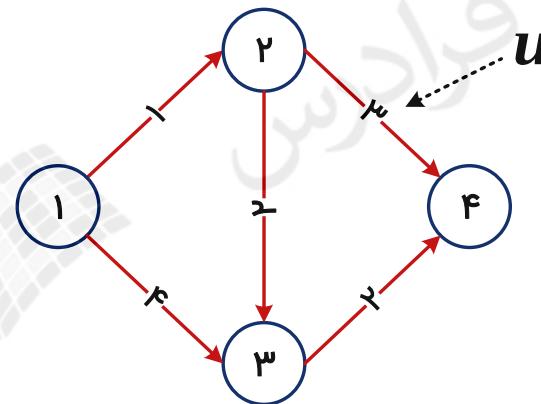
$$\begin{aligned}
 &\max f \\
 &s.t. \quad \sum_{j=1}^m x_{1j} - \sum_{k=1}^m x_{k1} = f \\
 &\quad \sum_{j=1}^m x_{mj} - \sum_{k=1}^m x_{km} = -f \\
 &\quad \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0 \quad i \neq 1 \text{ or } m \\
 &\quad x_{ij} \leq u_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \\
 &\quad x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

مساله حداکثر جریان - برش

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$X = \{1, 3\}$$

$$\bar{X} = N - X = \{2, 4\}$$



$$(X, \bar{X}) = \{(i, j) \mid i \in X, j \in \bar{X}\}$$

$$= \{(1, 2), (3, 4)\}$$

مجموعه برش

جداکننده ۱ از ۴

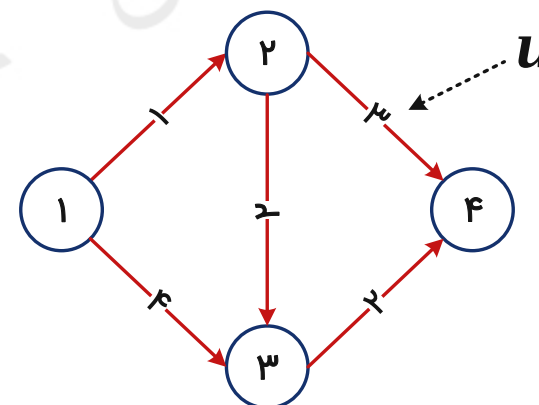
مساله حداکثر جریان - ظرفیت برش

اگر $(X, \bar{X})$ یک مجموعه برش باشد، ظرفیت این برش برابر است با:

$$U(X, \bar{X}) = \sum_{\substack{i \in X \\ j \in \bar{X}}} u_{ij}$$

مساله حداکثر جریان - ظرفیت برش

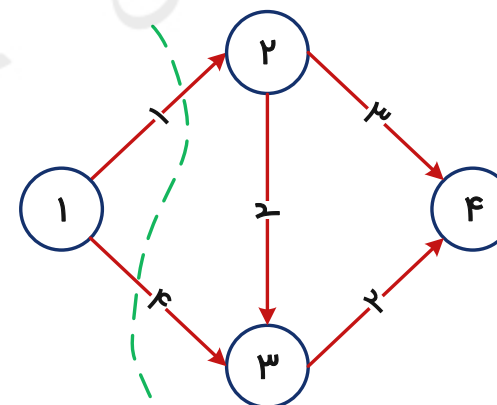
مثال: ظرفیت برش‌های مختلف شبکه زیر را به دست آورید.



مساله حداکثر جریان - ظرفیت برش

$$X = \{1\}, \quad \bar{X} = \{2, 3, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 1 + 4 = 5$$



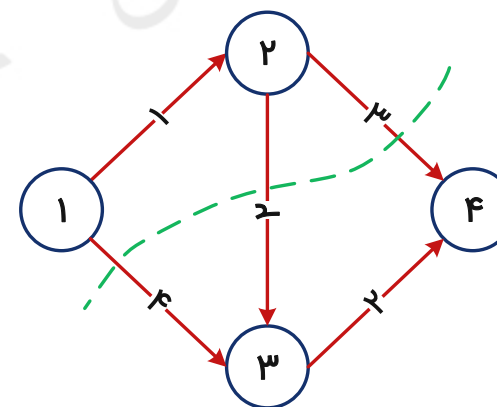
مساله حداکثر جریان - ظرفیت برش

$$X = \{1\}, \quad \bar{X} = \{2, 3, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 1 + 4 = 5$$

$$X = \{1, 2\}, \quad \bar{X} = \{3, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 4 + 2 + 3 = 9$$



مساله حداکثر جریان - ظرفیت برش

$$X = \{1\}, \quad \bar{X} = \{2, 3, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

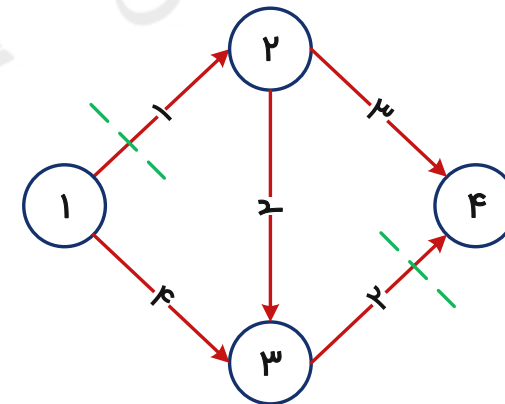
$$U(X, \bar{X}) = 1 + 4 = 5$$

$$X = \{1, 2\}, \quad \bar{X} = \{3, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 4 + 2 + 3 = 9$$

$$X = \{1, 3\}, \quad \bar{X} = \{2, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 2), (3, 4)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 1 + 2 = 3$$



مساله حداکثر جریان - ظرفیت برش

$$X = \{1\}, \quad \bar{X} = \{2, 3, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 1 + 4 = 5$$

$$X = \{1, 2\}, \quad \bar{X} = \{3, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$$

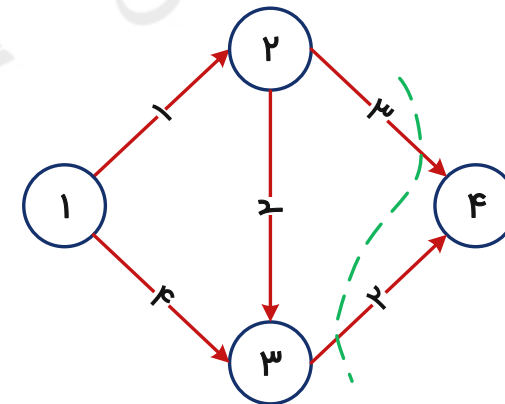
$$U(X, \bar{X}) = 4 + 2 + 3 = 9$$

$$X = \{1, 3\}, \quad \bar{X} = \{2, 4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(1, 2), (3, 4)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 1 + 2 = 3$$

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad \bar{X} = \{4\}, \quad (X, \bar{X}) = \{(2, 4), (3, 4)\}$$

$$U(X, \bar{X}) = 3 + 2 = 5$$



مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

قضیه: حداکثر جریان شبکه (f) کوچکتر یا مساوی ظرفیت برش‌های آن است.



یافتن ظرفیت تمام برش‌های شبکه



حداکثر جریان: حداقل ظرفیت برش‌ها



مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

گام‌های الگوریتم:

❖ در گراف G با مساوی صفر دادن همه متغیرها ($x_{ij} = 0$) یک جواب شدنی ایجاد کنید.

گام ۱

❖ با گراف G ، گراف G' را به صورت زیر تشکیل دهید.

۱- تمام رئوس G در G' هم وجود دارند.

۲- اگر در G ، $x_{ij} < u_{ij}$ باشد، تغییر جریان مجاز یال (i, j) را در G' برابر با $\Delta_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ بگیرید.

۳- اگر در G ، $x_{ij} > 0$ باشد، تغییر جریان مجاز یال (j, i) را در G' برابر با $\Delta_{ji} = x_{ij}$ بگیرید.

گام ۲

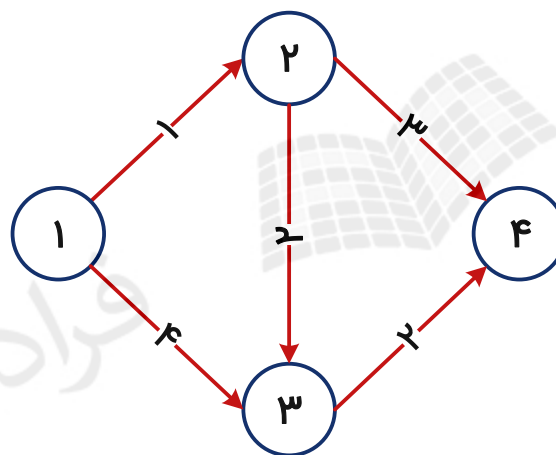
مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

- ❖ در G' یک مسیر از راس 1 به m پیدا کنید و آن را P بنامید. اگر چنین مسیری موجود نبود، توقف کنید؛ جواب بهینه به دست آمده است. در غیر این صورت، Δ را به عنوان حداقل تغییر جریان مجاز در G' روی P در نظر بگیرید.
- ❖ مسیر متناظر P را در G مشخص کنید. به یال‌های هم جهت با مسیر P مقدار Δ را اضافه کنید و همین مقدار را از یال‌های در خلاف جهت کسر کنید. سایر یال‌ها تغییر نمی‌کنند.
- ❖ به گام ۲ برگردید.

گام ۳

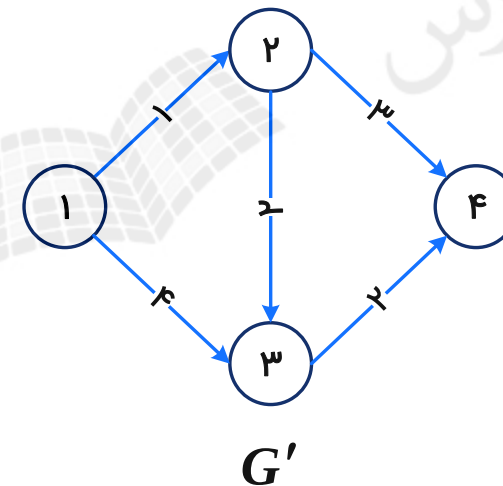
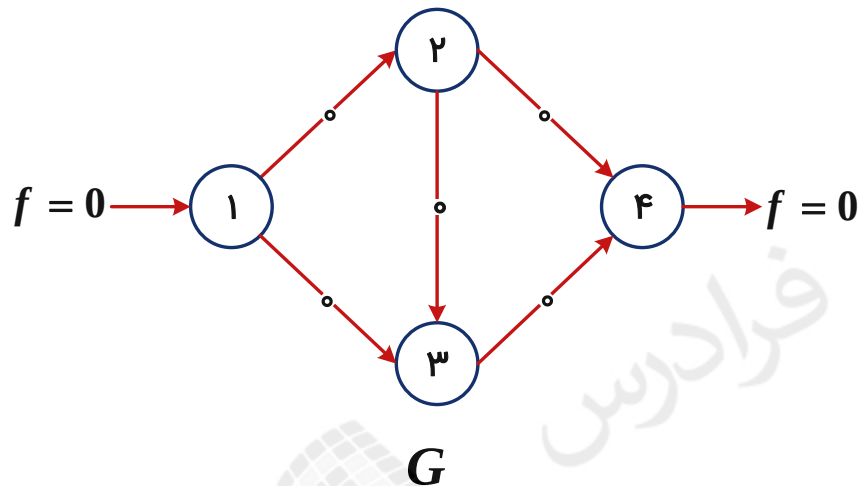
مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

مثال: حداکثر جریان شبکه زیر را به دست آورید.



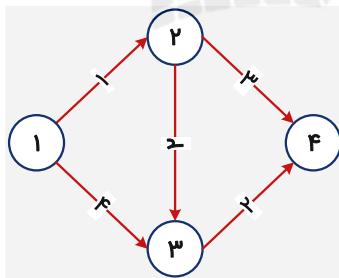
مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

تکرار اول



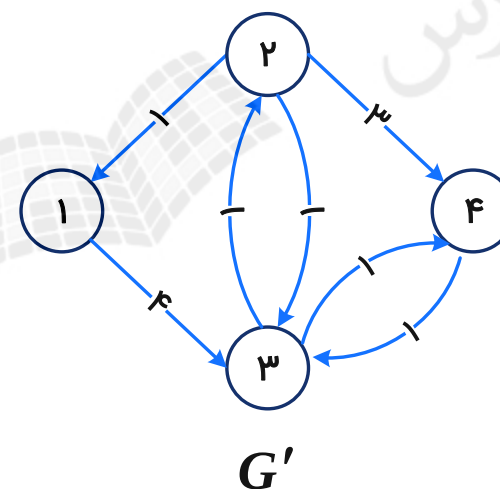
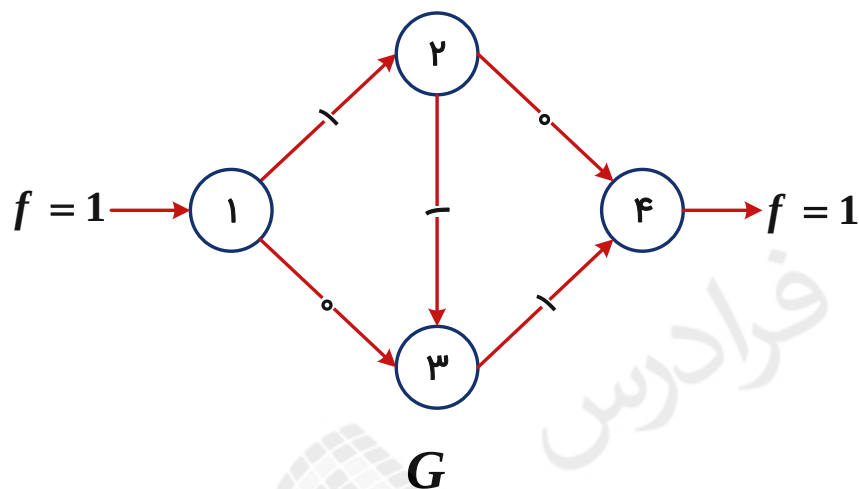
$$P = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$$

$$\Delta = 1$$



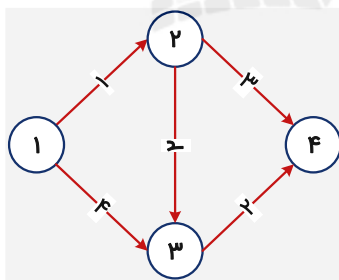
مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

تکرار دوم



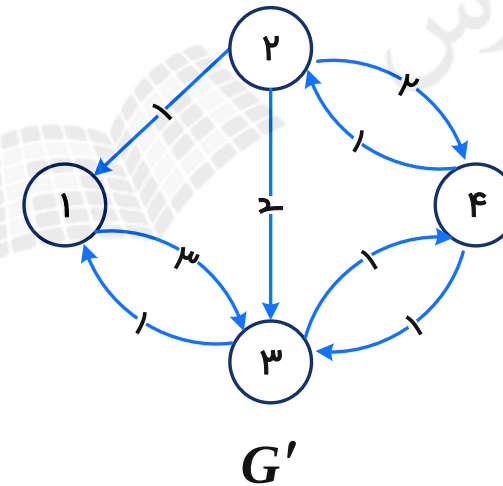
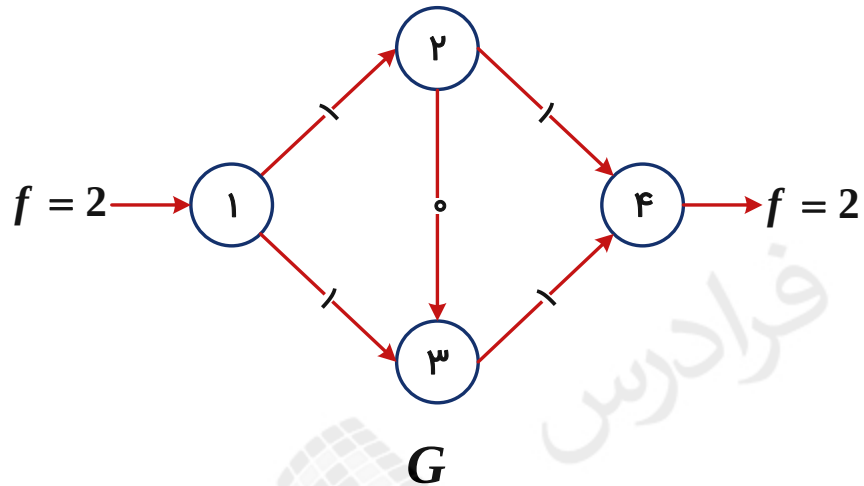
$$P = \{(1, 3), (3, 2), (2, 4)\}$$

$$\Delta = 1$$



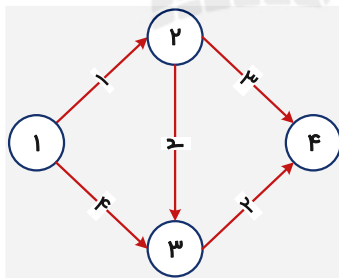
مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

تکرار سوم



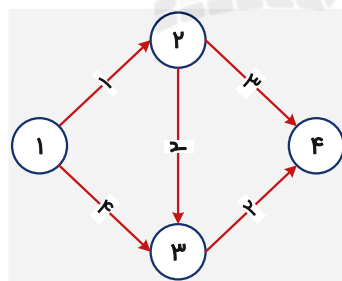
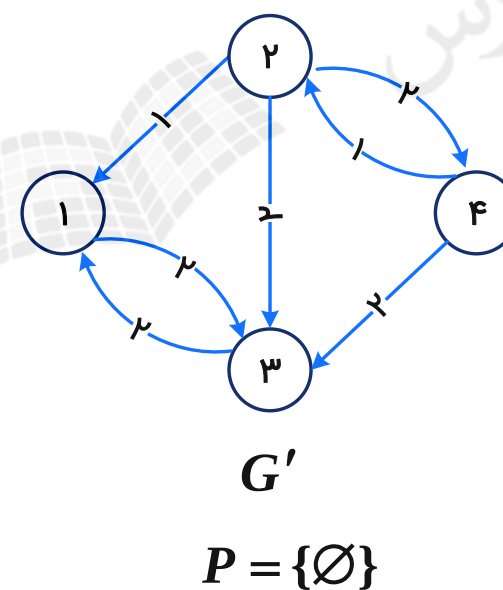
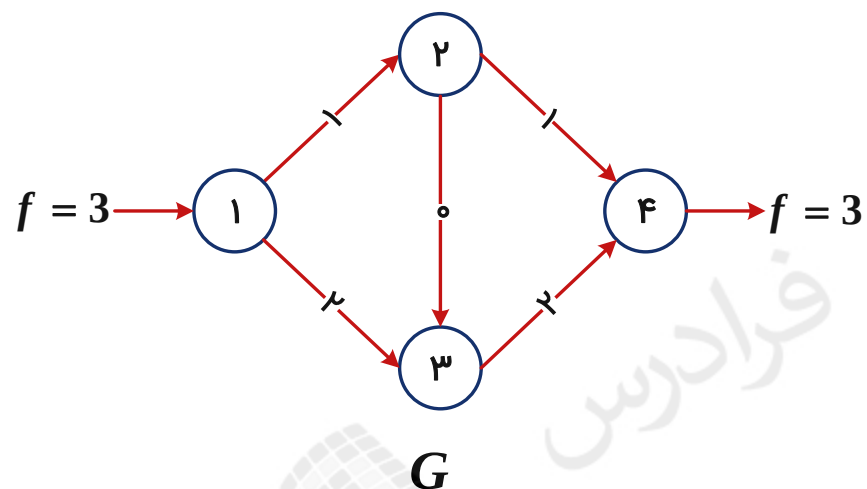
$$P = \{(1,3)(3,4)\}$$

$$\Delta = 1$$



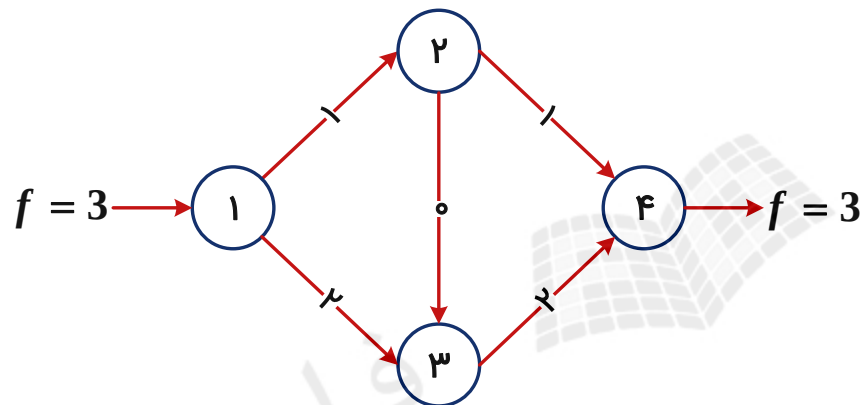
مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

تکرار چهارم



مساله حداکثر جریان - الگوریتم حل

جواب بهینه

 G

$$f^* = 3$$

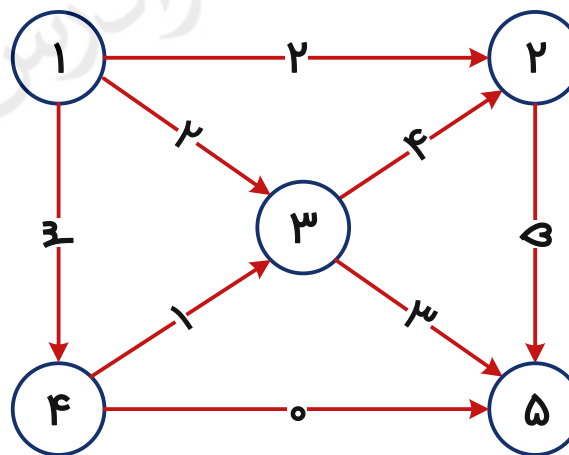
$$x_{12}^* = x_{24}^* = 1$$

$$x_{23}^* = 0$$

$$x_{13}^* = x_{34}^* = 2$$

مساله کوتاه‌ترین مسیر

- شبکه‌ای با m راس و n یال
- یک کالا در طول شبکه در جریان است.
- هزینه جریان در یال (i, j) برابر با c_{ij}
- هدف: یافتن کوتاه‌ترین (کم‌هزینه‌ترین) مسیر از راس ۱ به m



مساله کوتاهترین مسیر - مدل سازی

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\
 & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^m x_{1j} - \sum_{k=1}^m x_{k1} = 1 \\
 & \quad \sum_{j=1}^m x_{mj} - \sum_{k=1}^m x_{km} = -1 \\
 & \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = 0 \quad i \neq 1 \text{ or } m \\
 & \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

مساله کوتاهترین مسیر - مدل دوگان

$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 - w_m \\ \text{s.t.} \quad & w_i - w_j \leq c_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, m \\ & w_i \text{ unrestricted} \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

مساله کوتاه‌ترین مسیر - الگوریتم حل (دایجسترا)

گام‌های الگوریتم:

گام ۱ ❖ قرار دهید $w'_1 = 0$ و $X = \{1\}$.

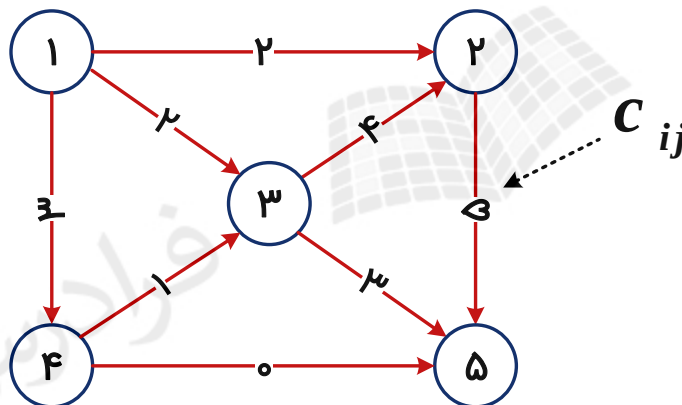
گام ۲ ❖ $\bar{X} = N - X$ و $(X, \bar{X}) = \{(i, j) \mid i \in X, j \in \bar{X}\}$ را به دست آورید.

گام ۳ ❖ $w'_p + c_{pq} = \min_{(i,j) \in (X, \bar{X})} \{w'_i + c_{ij}\}$ را محاسبه کنید.
❖ $w'_q = w'_p + c_{pq}$ قرار دهید و q به X اضافه نمایید.

گام ۴ ❖ گام ۲ و ۳ را $m - 1$ بار تکرار کنید تا جواب بهینه به دست آید.

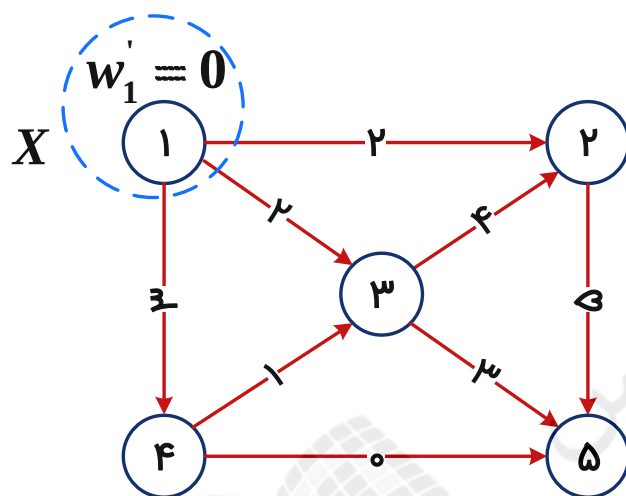
مساله کوتاهترین مسیر - الگوریتم حل (دایجسترا)

مثال: کوتاهترین مسیر از راس ۱ به ۵؟



مساله کوتاهترین مسیر - الگوریتم حل (دایجسترا)

تکرار اول



$$w'_1 = 0$$

$$X = \{1\} \quad \bar{X} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$(X, \bar{X}) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

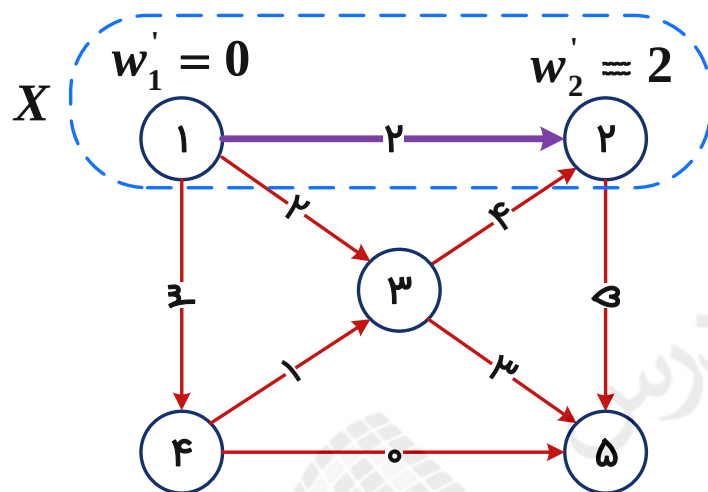
$$w'_1 + c_{12} = \min\{w'_1 + c_{12}, w'_1 + c_{13}, w'_1 + c_{14}\}$$

$$= \min\{0 + 2, 0 + 2, 0 + 3\} = 2$$

$$(p, q) = (1, 2)$$

مساله کوتاهترین مسیر - الگوریتم حل (دایجسترا)

تکرار دوم



$$w'_1 = 0, \quad w'_2 = 2$$

$$X = \{1, 2\} \quad \bar{X} = \{3, 4, 5\}$$

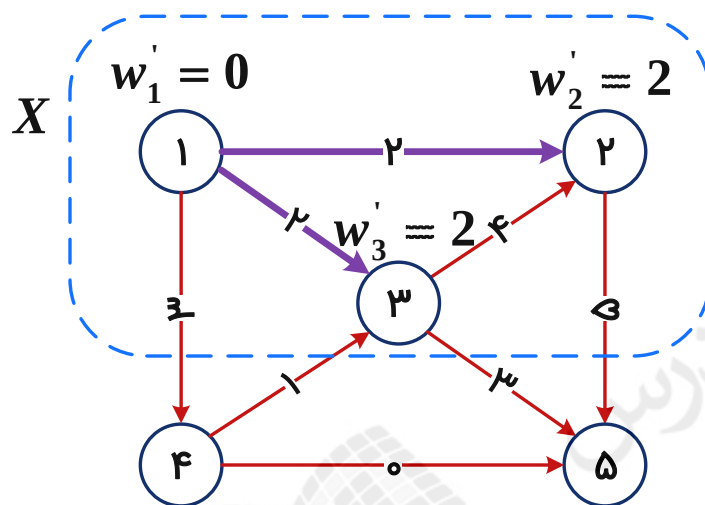
$$(X, \bar{X}) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

$$\begin{aligned} w'_1 + c_{13} &= \min\{w'_1 + c_{13}, w'_1 + c_{14}, w'_2 + c_{25}\} \\ &= \min\{0 + 2, 0 + 3, 2 + 5\} = 2 \end{aligned}$$

$$(p, q) = (1, 3)$$

مساله کوتاهترین مسیر - الگوریتم حل (دایجسترا)

تکرار سوم



$$w'_1 = 0, \quad w'_2 = 2, \quad w'_3 = 2$$

$$X = \{1, 2, 3\} \quad \bar{X} = \{4, 5\}$$

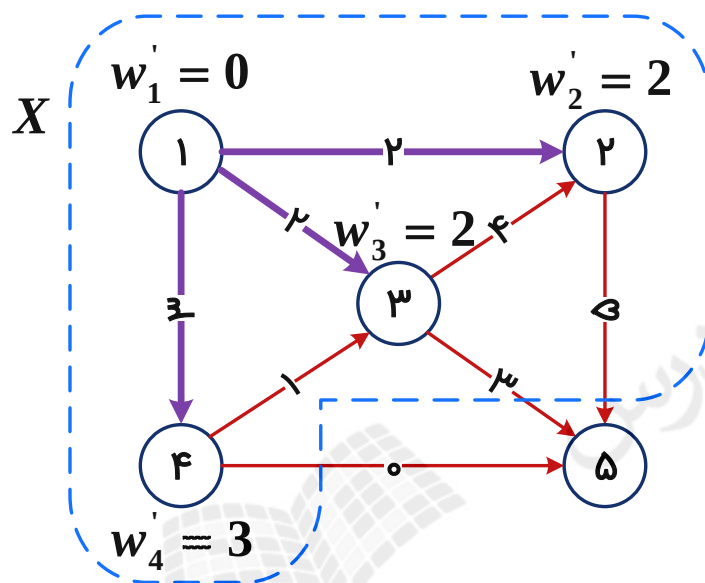
$$(X, \bar{X}) = \{(1, 4), (2, 5), (3, 5)\}$$

$$\begin{aligned} w'_1 + c_{14} &= \min\{w'_1 + c_{14}, w'_2 + c_{25}, w'_3 + c_{35}\} \\ &= \min\{0 + 3, 2 + 5, 2 + 3\} = 3 \end{aligned}$$

$$(p, q) = (1, 4)$$

مساله کوتاهترین مسیر - الگوریتم حل (دایجسترا)

تکرار چهارم



$$w'_1 = 0, \quad w'_2 = 2, \quad w'_3 = 2, \quad w'_4 = 3$$

$$X = \{1, 2, 3, 4\} \quad \bar{X} = \{5\}$$

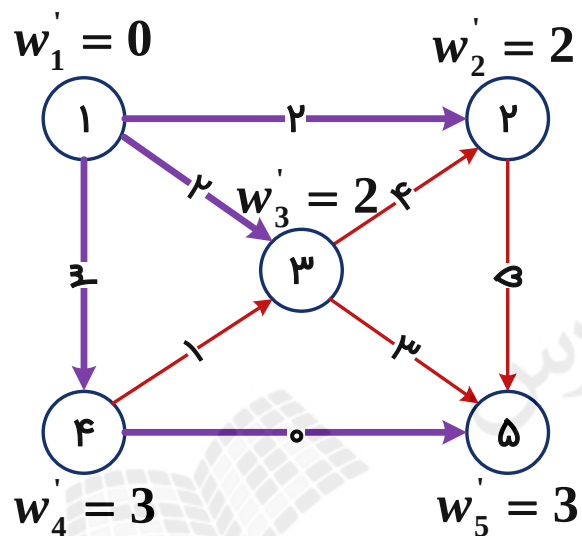
$$(X, \bar{X}) = \{(4, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

$$\begin{aligned} w'_4 + c_{45} &= \min\{w'_4 + c_{45}, w'_2 + c_{25}, w'_3 + c_{35}\} \\ &= \min\{3 + 0, 2 + 3, 2 + 3\} = 3 \end{aligned}$$

$$(p, q) = (4, 5)$$

مساله کوتاهترین مسیر - الگوریتم حل (دایجسترا)

جواب بهینه



کوتاهترین فاصله	تا	از
$w'_1 = 0$	۱	۱
$w'_2 = 2$	۲	۱
$w'_3 = 2$	۳	۱
$w'_4 = 3$	۴	۱
$w'_5 = 3$	۵	۱

فهرست منابع

- Bazaraa, Mokhtar S.; Jarvis, John J.; Sherali, Hanif D.; *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons, 2011.
- Hillier, Frederick S. *Introduction to operations research*. Tata McGraw-Hill Education, 2012.
- Taha, Hamdy A. *Operations research: an introduction*. Vol. 790. Pearson/Prentice Hall, 2011.
- آریانژاد، میربهادرقلی؛ سجادی، سیدجعفر؛ تحقیق در عملیات ۲ (پژوهش عملیاتی ۲ و ۳)، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۹۳.

این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آموزش تحقیق در عملیات ۳»
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvtior122