

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس  
[www.faradars.org](http://www.faradars.org)

# آموزش تحقیق در عملیات ۳

## درس هفتم: برنامه‌ریزی غیرخطی

مدرس:

عباس احمدی

دانشجوی دکترای مهندسی صنایع

## انواع مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی

$$\min/\max f(X)$$

$$g_i(X) \leq b_i \quad \forall i$$

$$X \geq 0$$

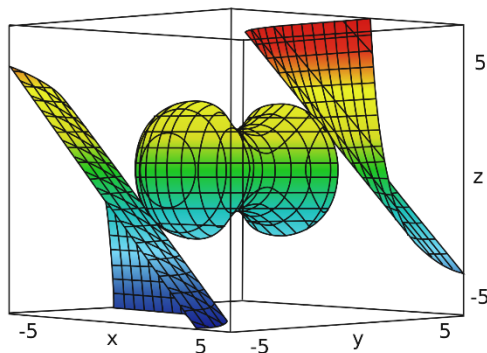


| مدل   | $f(X)$  | $g_i(X)$ | $X$               |
|-------|---------|----------|-------------------|
| LP    | خطی     | خطی      | پیوسته            |
| IP    | خطی     | خطی      | عدد صحیح          |
| MIP   | خطی     | خطی      | عدد صحیح و پیوسته |
| NLP   | غیرخطی* | غیرخطی*  | پیوسته            |
| MINLP | غیرخطی* | غیرخطی*  | عدد صحیح و پیوسته |

\* در مدل‌های غیرخطی حداقل یکی از دو توابع (نه لزوماً هر دو) باید غیرخطی باشد.

## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

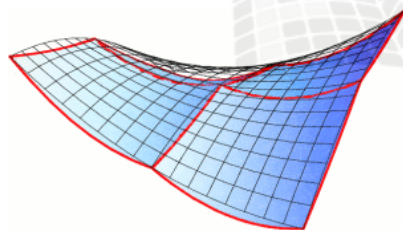
✓ پیچیدگی محاسباتی مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) از نوع NP-hard است.



✓ هیچ الگوریتم جامعی برای حل تمام مسایل NLP وجود ندارد.

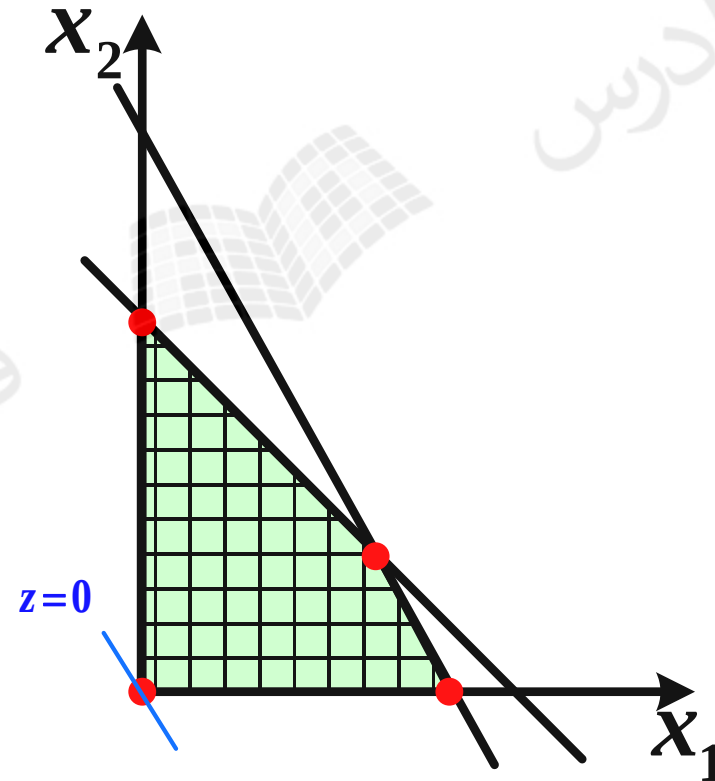
✓ حتی ممکن است برخی مسایل NLP قابل حل نباشند.

✓ برای حل هر نوع مساله، ممکن است بتوان الگوریتم خاصی ارائه نمود.



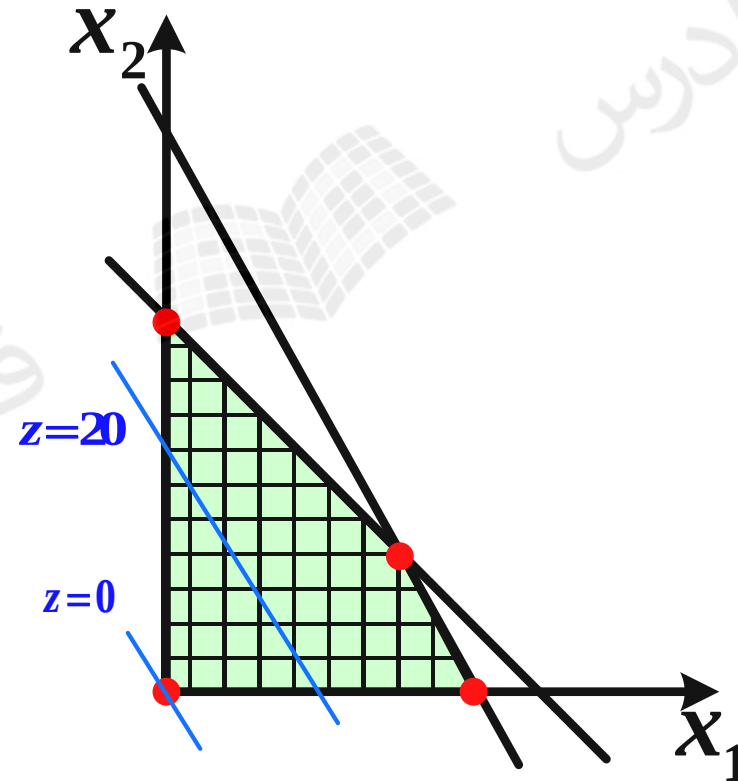
## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

$$\begin{aligned} LP : \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



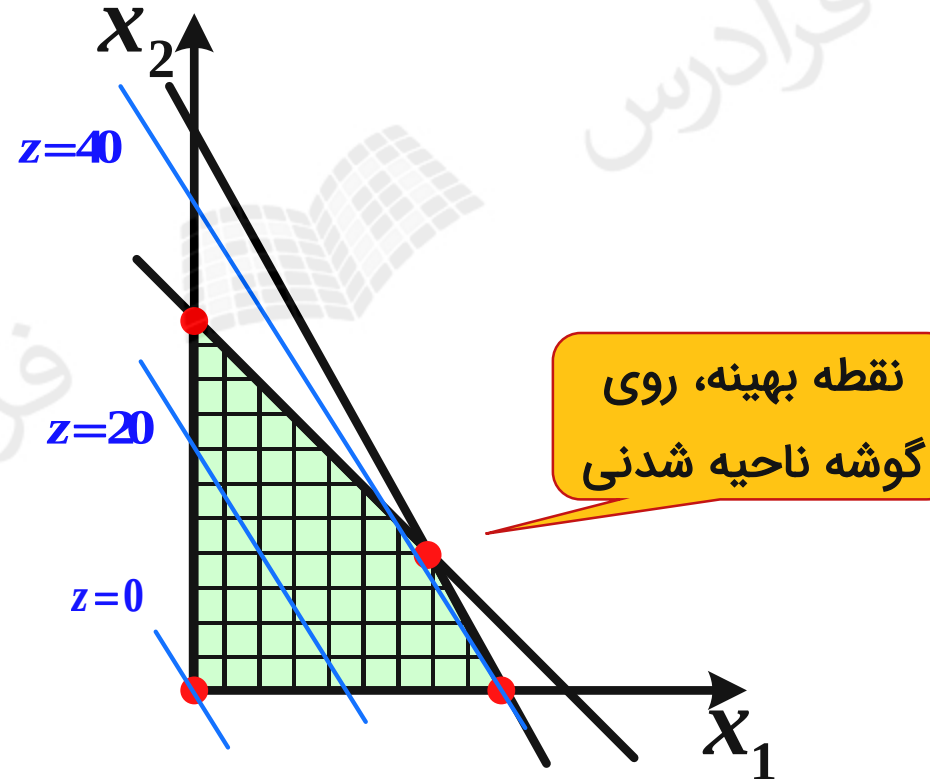
## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

$$\begin{aligned} LP : \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



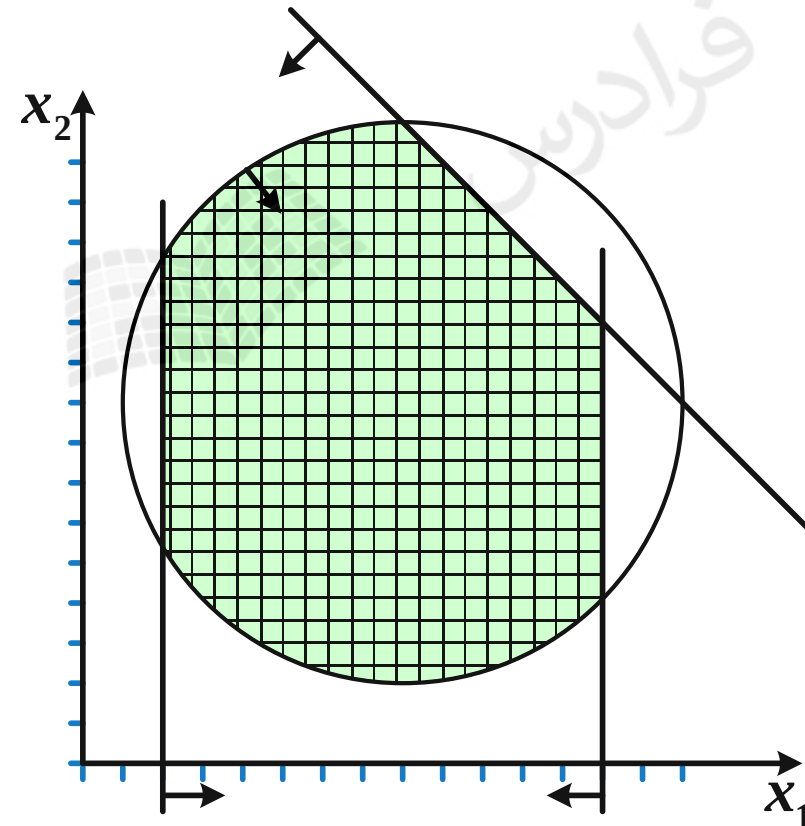
## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

$$\begin{aligned}
 &LP : \max z = 8x_1 + 5x_2 \\
 &\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\
 &\quad \quad 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\
 &\quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



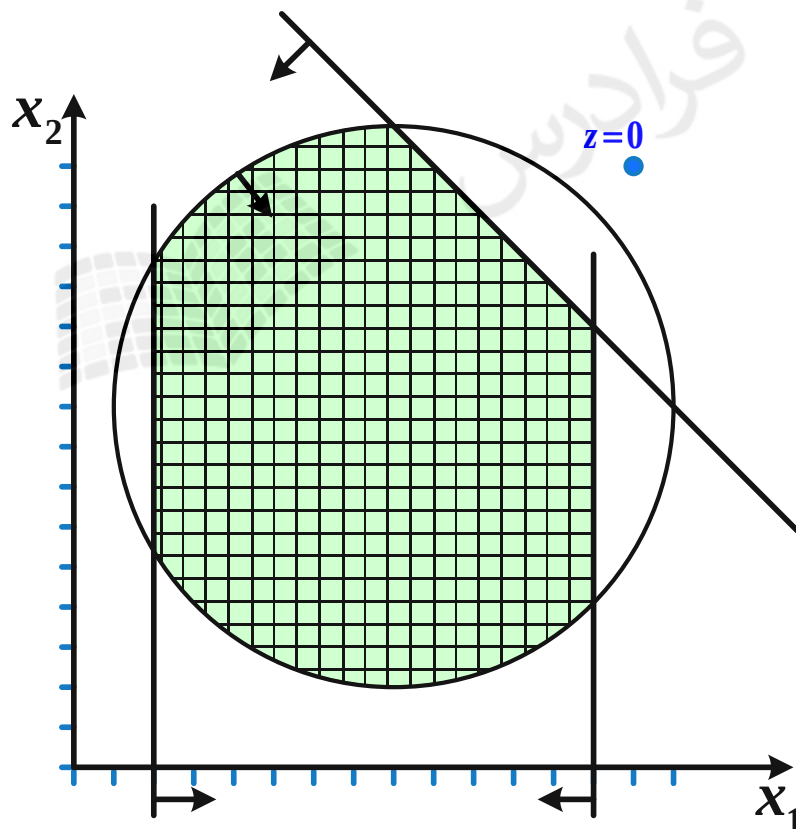
## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

$$\begin{aligned}
 \text{NLP : } \min z &= (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 15)^2 \\
 \text{s.t. } & (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 9)^2 \leq 49 \\
 & x_1 + x_2 \leq 24 \\
 & x_1 \geq 2 \\
 & x_1 \leq 13 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



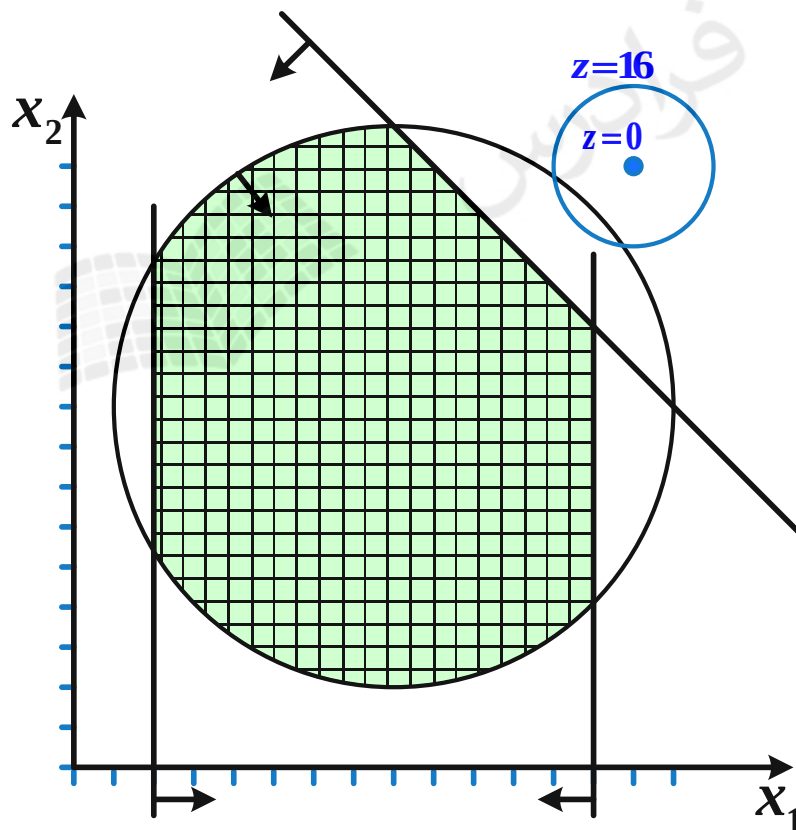
## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

$$\begin{aligned}
 \text{NLP : } \min z &= (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 15)^2 \\
 \text{s.t. } & (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 9)^2 \leq 49 \\
 & x_1 + x_2 \leq 24 \\
 & x_1 \geq 2 \\
 & x_1 \leq 13 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

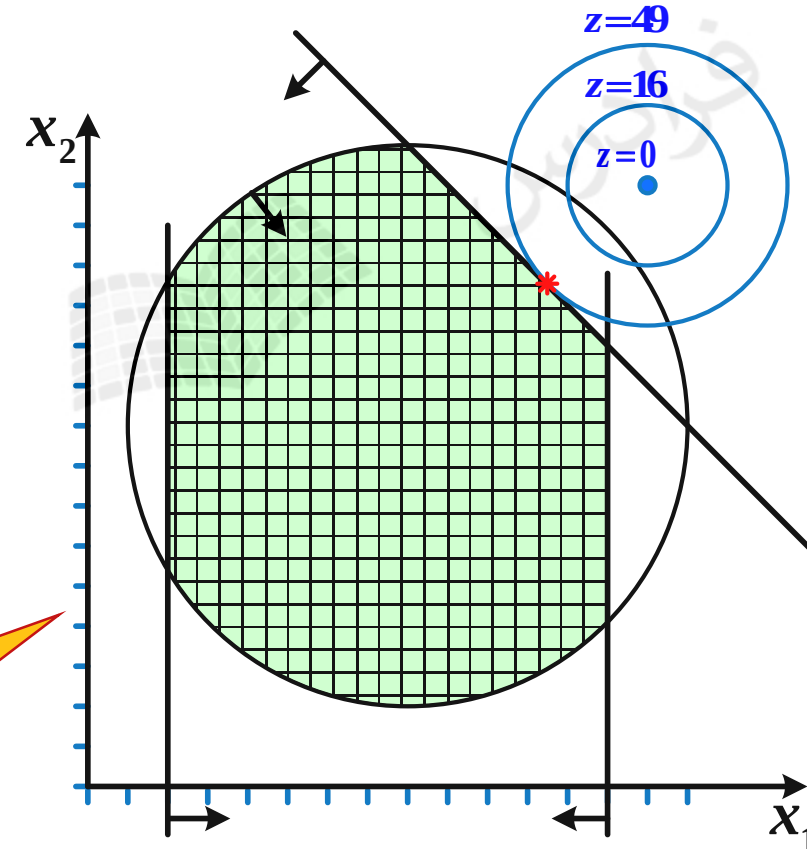
$$\begin{aligned}
 \text{NLP : } \min z &= (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 15)^2 \\
 \text{s.t. } & (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 9)^2 \leq 49 \\
 & x_1 + x_2 \leq 24 \\
 & x_1 \geq 2 \\
 & x_1 \leq 13 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

$$\begin{aligned}
 \text{NLP : } \min z &= (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 15)^2 \\
 \text{s.t. } & (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 9)^2 \leq 49 \\
 & x_1 + x_2 \leq 24 \\
 & x_1 \geq 2 \\
 & x_1 \leq 13 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

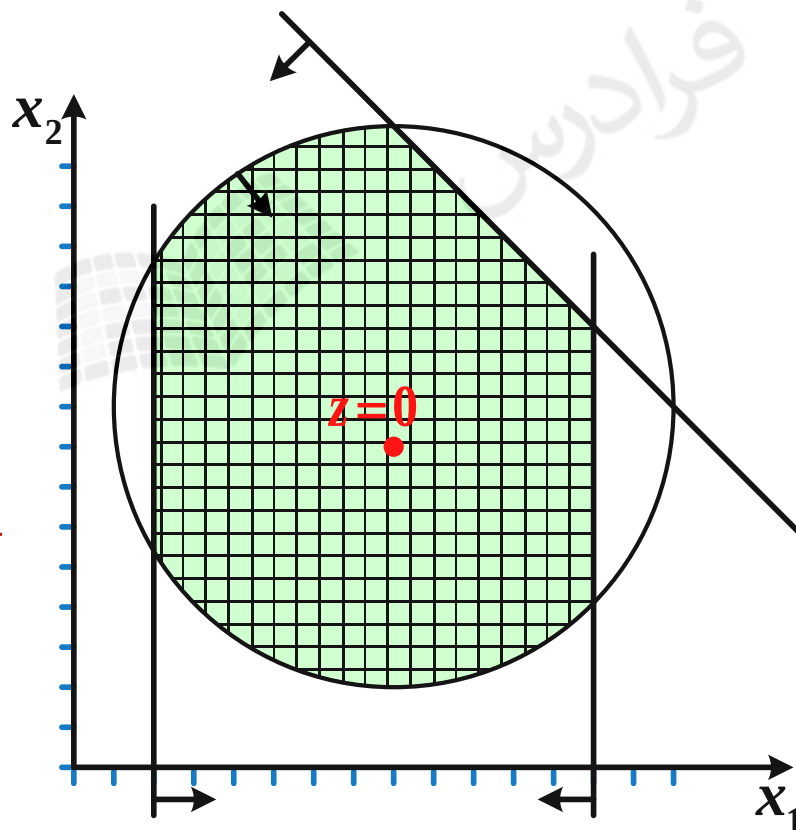
نقطه بهینه، روی مرز ناحیه  
شدنی (اما غیرگوشه‌ای)



## ویژگی‌های برنامه‌ریزی غیرخطی

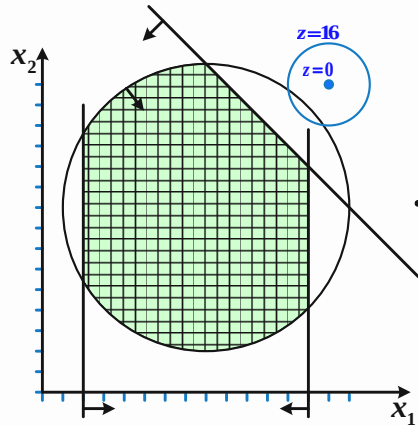
$$\begin{aligned}
 \text{NLP : } \min z &= (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 8)^2 \\
 \text{s.t. } & (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 9)^2 \leq 49 \\
 & x_1 + x_2 \leq 24 \\
 & x_1 \geq 2 \\
 & x_1 \leq 13 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

نقطه بهینه، داخل  
ناحیه شدنی

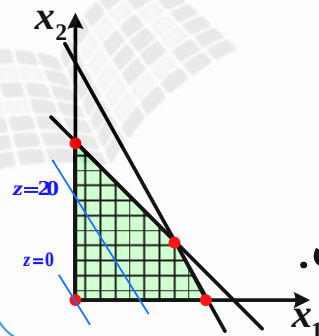
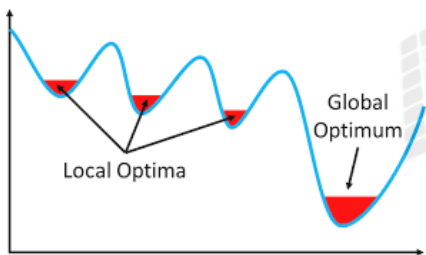


## مقایسه پیچیدگی حل مسایل LP و NLP

NLP



- ❖ جواب بهینه لزوماً روی گوشه‌های فضای جواب نیست.
- ❖ حتی ممکن است فضای جواب هیچ گوشه‌ای نداشته باشد (مانند دایره).
- ❖ جواب بهینه ممکن است روی مرز ناحیه شدنی و حتی داخل ناحیه شدنی قرار گیرد.
- ❖ ممکن است چندین جواب بهینه نسبی (Local) وجود داشته باشد.
- ❖ هر جواب بهینه نسبی (Local)، لزوماً جواب بهینه جهانی (Global) نیست.



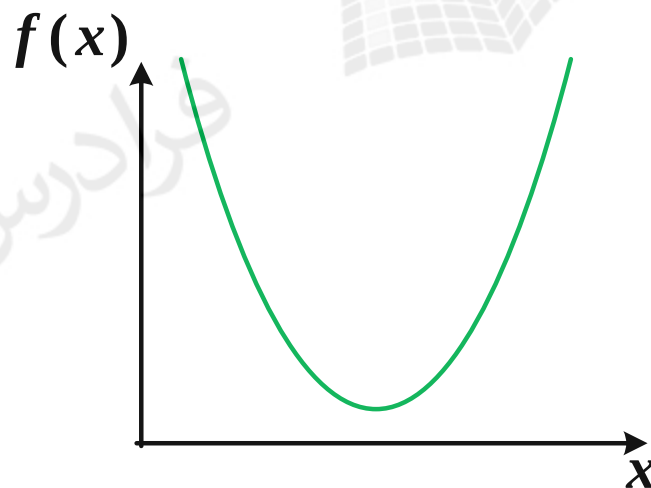
- ❖ جواب بهینه حتماً یکی از نقاط گوشه‌ای خواهد بود.
- ❖ تعداد نقاط گوشه‌ای محدود است.
- ❖ جواب بهینه نسبی (Local)، حتماً جواب بهینه جهانی (Global) است.

LP

## تابع محدب (Convex)

تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  محدب است اگر به ازای هر  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  و  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

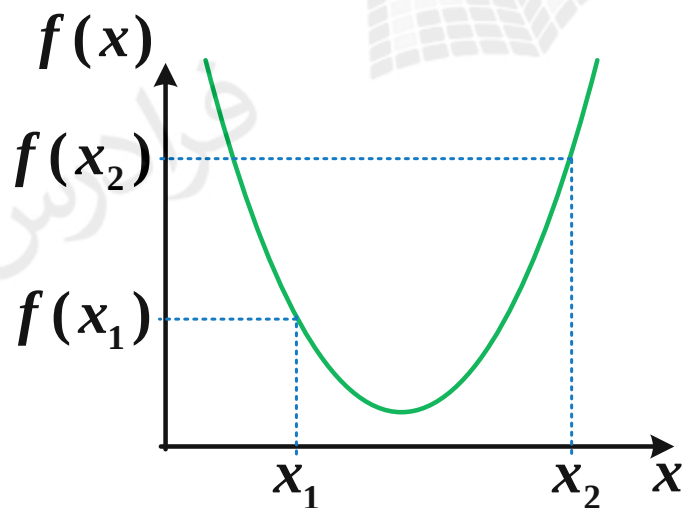
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



## تابع محدب (Convex)

تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  محدب است اگر به ازای هر  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  و  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

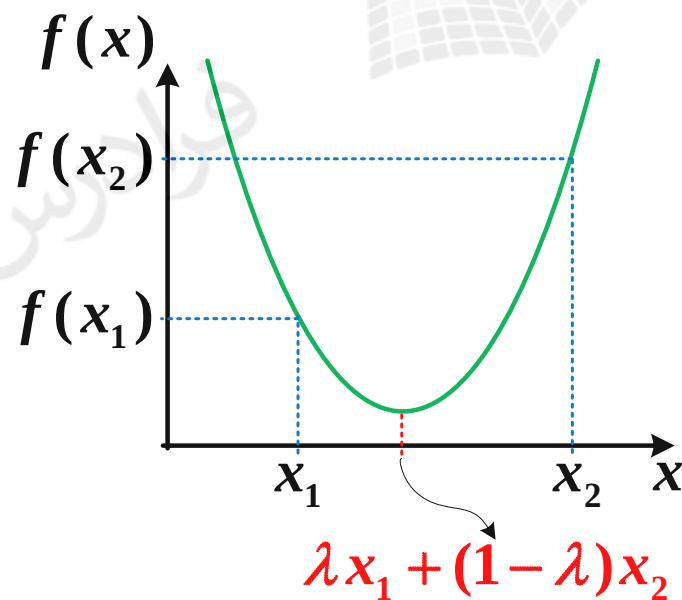
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



## تابع محدب (Convex)

تابع  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  محدب است اگر به ازای هر  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  و  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

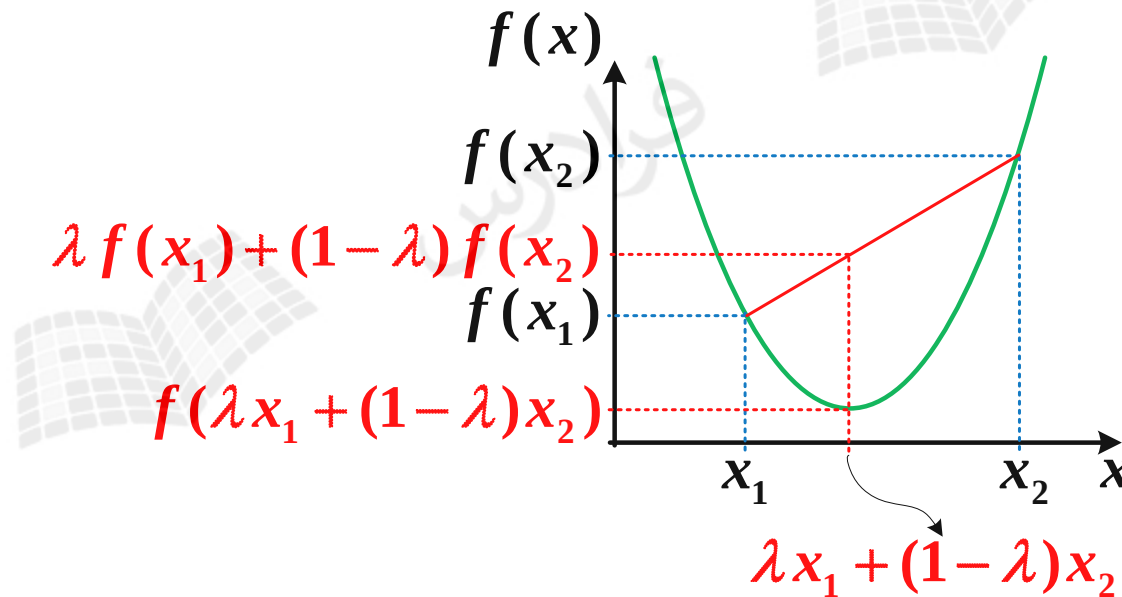




## تابع محدب (Convex)

تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  محدب است اگر به ازای هر  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  و  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

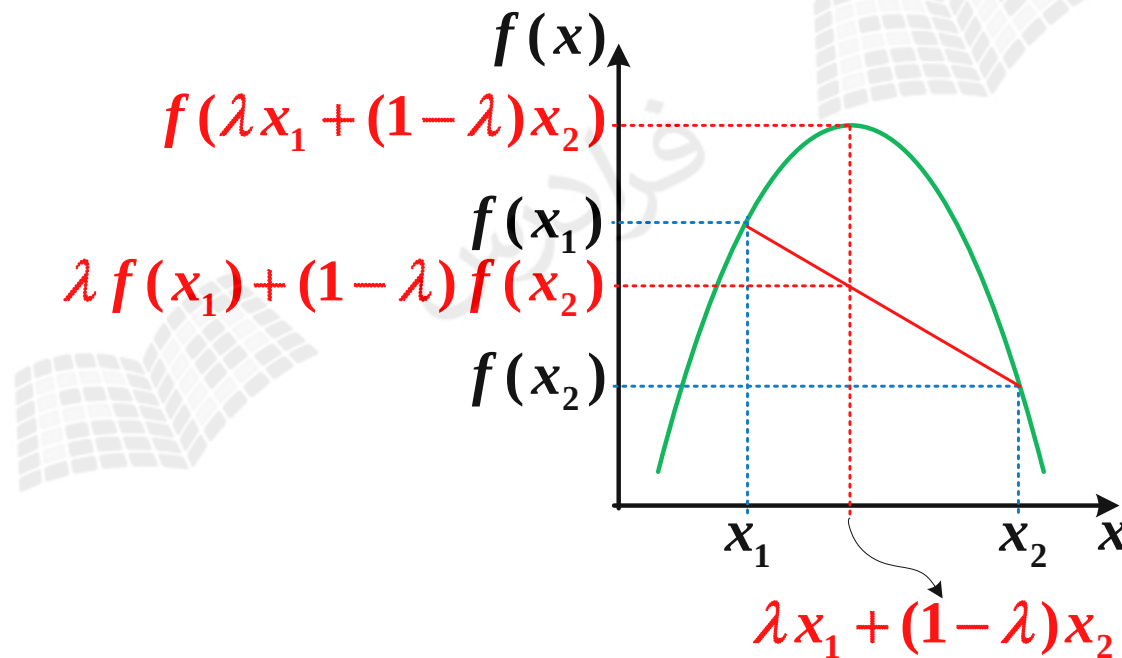
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



## تابع مقعر (Concave)

تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  مقعر است اگر به ازای هر  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  و  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

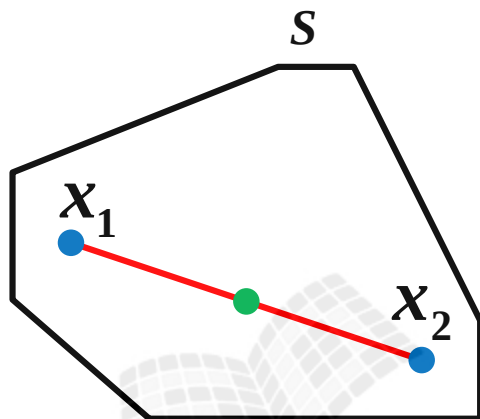
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



## مجموعه محدب

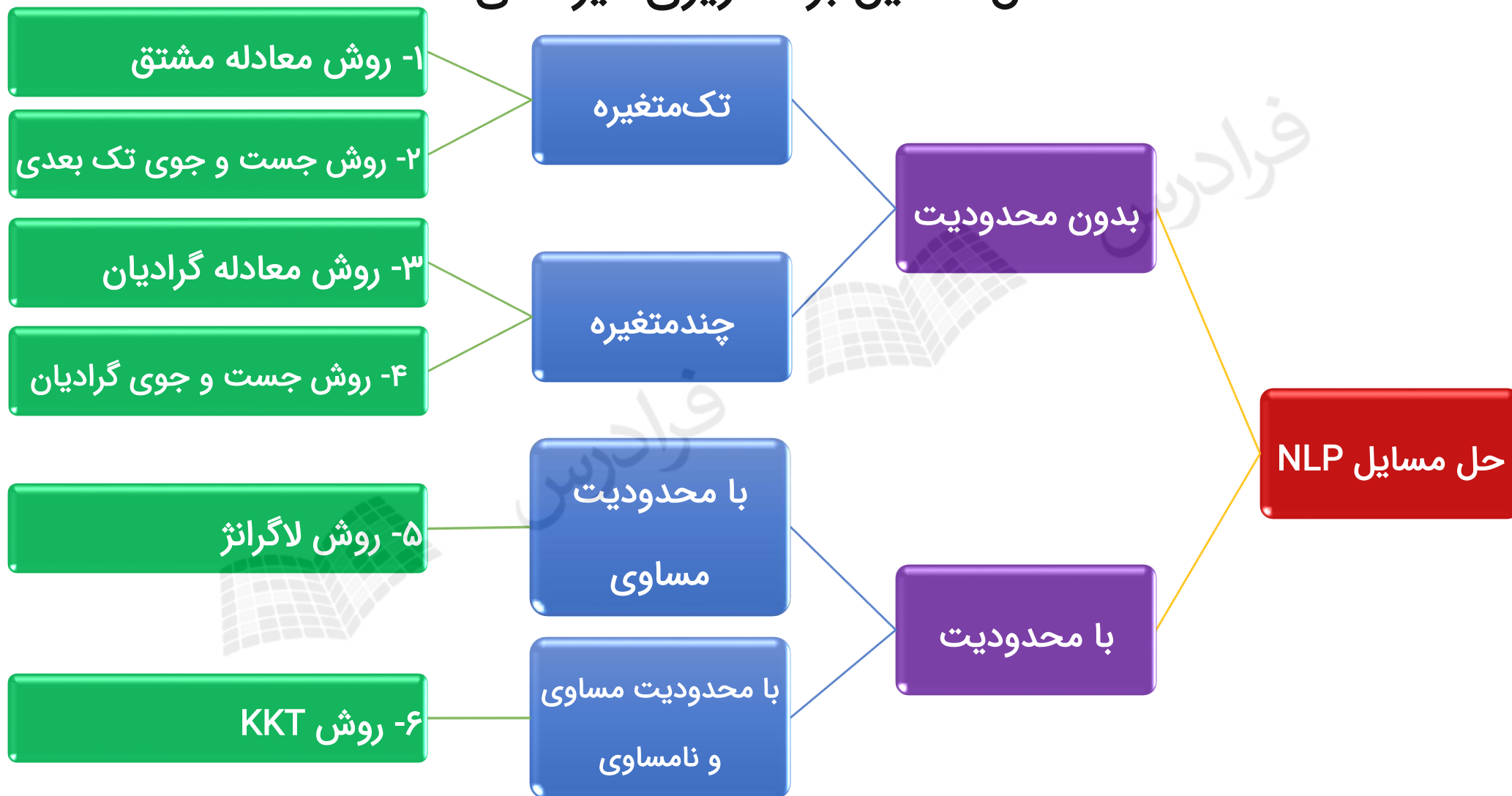
مجموعه  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  یک مجموعه محدب است اگر به ازای هر  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  و  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$$



به عبارت دیگر: به ازای هر دو نقطه دلخواه، خط  
واصل میان آن‌ها، تماماً داخل فضا قرار بگیرد.

## حل مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی



## حل مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی

**نکته:** روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی، جواب‌های بهینه نسبی ارائه می‌کنند.

❖ تضمین جهانی بودن یک جواب بهینه نسبی، معمولا خارج از روش (الگوریتم) موردنظر است.

**نکته:** وجود شرایط **برنامه‌ریزی محدب**، تضمین می‌کند که جواب بهینه نسبی، همان جواب بهینه جهانی است.

❖ شرایط برنامه‌ریزی محدب

|                                                          |   |
|----------------------------------------------------------|---|
| Min: (۱) تابع هدف <b>همواره</b> محدب، (۲) فضای جواب محدب | } |
| Max: (۱) تابع هدف <b>همواره</b> مقعر، (۲) فضای جواب محدب |   |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش معادله مشتق

$x^*$  یک جواب بهینه نسبی برای تابع  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  است اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\left. \begin{array}{l} \text{شرط لازم: } f'(x^*) = 0 \\ \text{شرط کافی: } f''(x^*) \geq 0 \end{array} \right\} \text{Min سازی}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{شرط لازم: } f'(x^*) = 0 \\ \text{شرط کافی: } f''(x^*) \leq 0 \end{array} \right\} \text{Max سازی}$$

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش معادله مشتق

**مثال:** جواب بهینه نسبی مساله  $\max f(x) = 3x^3 - 9x - 1$  را به دست آورید. 

$$f'(x) = 9x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

یا  
max  
؟min

$$f''(x) = 18x \Rightarrow \begin{cases} f''(x_1) = 18 > 0 \longrightarrow \cancel{\text{min نسبی}} x_1 \\ f''(x_2) = -18 < 0 \longrightarrow \text{max نسبی } x_2 \end{cases}$$

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش معادله مشتق

**مثال:** جواب بهینه نسبی مساله  $\max f(x) = -x^2 + 4x$  را به دست آورید. 

$$f'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

یا max  
؟min

$$f''(x) = -2 < 0 \longrightarrow x_1 \text{ max نسبی} \xrightarrow[\text{همواره منفی}]{\text{مشتق دوم}} \text{max جهانی}$$

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

**مثال:**  جواب بهینه نسبی مساله  $\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$  را به دست آورید.

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0 \quad \text{?} \quad x = ?$$



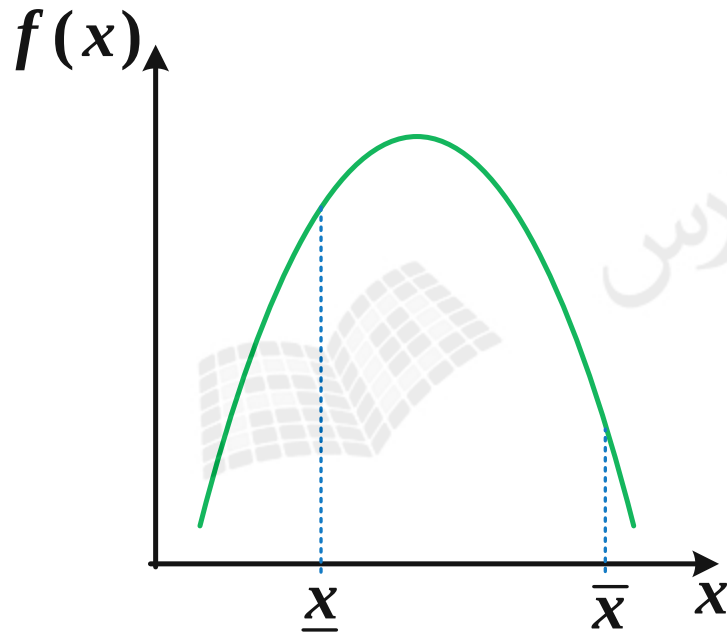
الگوریتم جست و جوی تک‌بعدی

$$f''(x) = -5x^4 - 3x^2$$

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

$$\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$$

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad f'(0) = 1 > 0 \quad f'(2) = -39 < 0$$

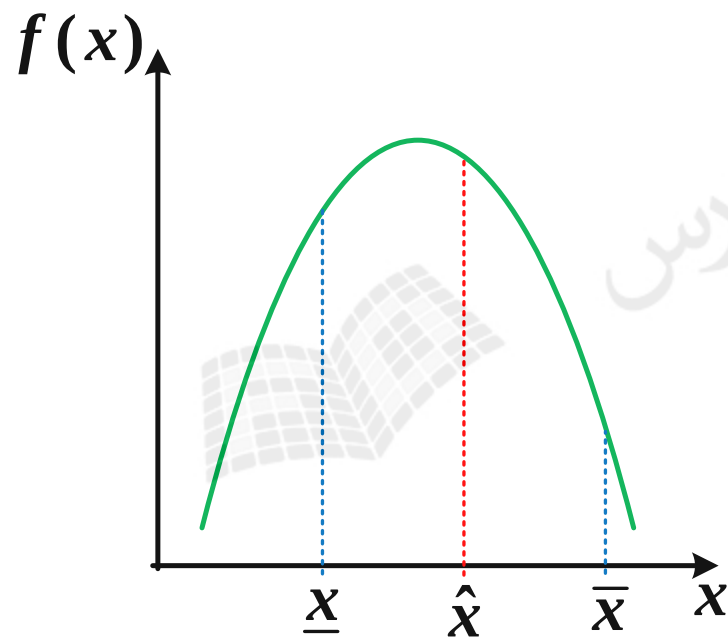


| $f'(\hat{x})$ | $\hat{x}$ | $\epsilon$ | $\bar{x}$ | $\underline{x}$ | تکرار |
|---------------|-----------|------------|-----------|-----------------|-------|
|               |           | ۲          | ۲         | ۰               | ۰     |
|               |           |            |           |                 |       |
|               |           |            |           |                 |       |
|               |           |            |           |                 |       |
|               |           |            |           |                 |       |
|               |           |            |           |                 |       |
|               |           |            |           |                 |       |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

$$\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$$

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0$$

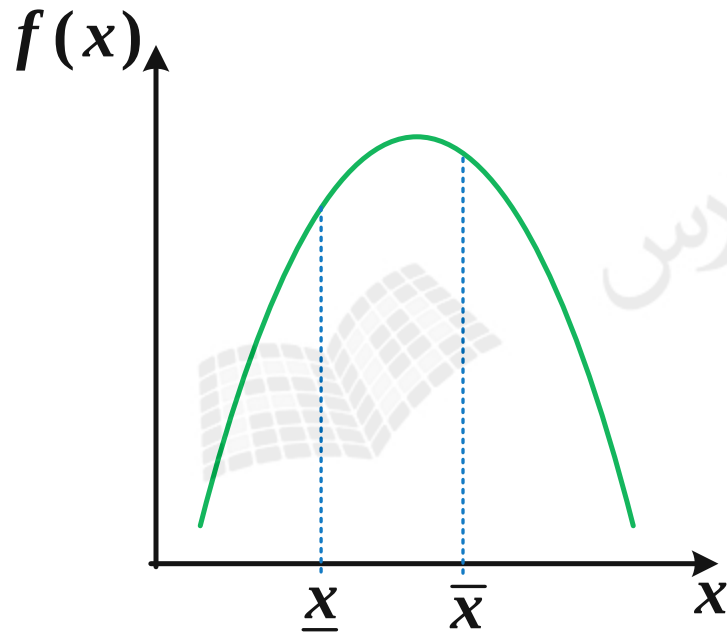


| $f'(\hat{x})$ | $\hat{x}$ | $\varepsilon$ | $\bar{x}$ | $\underline{x}$ | تکرار |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------------|-------|
| -۱            | ۱         | ۲             | ۲         | ۰               | ۰     |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

$$\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$$

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0$$

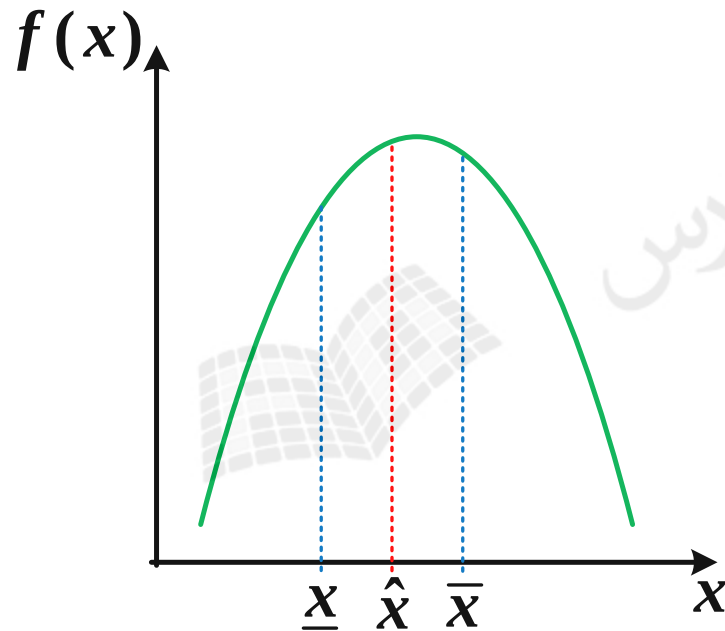


| $f'(\hat{x})$ | $\hat{x}$ | $\mathcal{E}$ | $\bar{x}$ | $\underline{x}$ | تکرار |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------------|-------|
| -۱            | ۱         | ۲             | ۲         | ۰               | ۰     |
|               |           | ۱             | ۱         | ۰               | ۱     |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

$$\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$$

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0$$

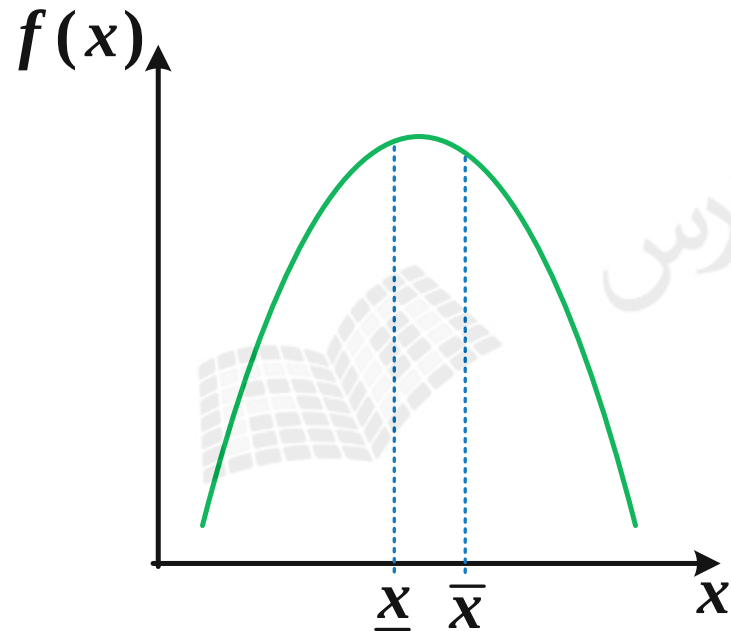


| $f'(\hat{x})$ | $\hat{x}$ | $\mathcal{E}$ | $\bar{x}$ | $\underline{x}$ | تکرار |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------------|-------|
| -۱            | ۱         | ۲             | ۲         | ۰               | ۰     |
| ۰/۸۴          | ۰/۵       | ۱             | ۱         | ۰               | ۱     |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

$$\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$$

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0$$



| $f'(\hat{x})$ | $\hat{x}$ | $\mathcal{E}$ | $\bar{x}$ | $\underline{x}$ | تکرار |
|---------------|-----------|---------------|-----------|-----------------|-------|
| -۱            | ۱         | ۲             | ۲         | ۰               | ۰     |
| ۰/۸۴          | ۰/۵       | ۱             | ۱         | ۰               | ۱     |
|               |           | ۰/۵           | ۱         | ۰/۵             | ۲     |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |
|               |           |               |           |                 |       |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

$$\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$$

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0$$

| تکرار | $\underline{x}$ | $\bar{x}$ | $\mathcal{E}$ | $\hat{x}$ | $f'(\hat{x})$ |
|-------|-----------------|-----------|---------------|-----------|---------------|
| ۰     | ۰               | ۲         | ۲             | ۱         | -۱            |
| ۱     | ۰               | ۱         | ۱             | ۰/۵       | ۰/۸۴          |
| ۲     | ۰/۵             | ۱         | ۰/۵           | ۰/۷۵      | ۰/۳۴          |
|       |                 |           |               |           |               |
|       |                 |           |               |           |               |
|       |                 |           |               |           |               |
|       |                 |           |               |           |               |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

$$\max f(x) = -\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + x$$

$$f'(x) = -x^5 - x^3 + 1 = 0$$

$$x_1 \approx 0.859$$

$$\varepsilon = 0.032 \leq 0.05$$

| تکرار | $\underline{x}$ | $\bar{x}$ | $\varepsilon$ | $\hat{x}$ | $f'(\hat{x})$ |
|-------|-----------------|-----------|---------------|-----------|---------------|
| ۰     | ۰               | ۲         | ۲             | ۱         | -۱            |
| ۱     | ۰               | ۱         | ۱             | ۰/۵       | ۰/۸۴          |
| ۲     | ۰/۵             | ۱         | ۰/۵           | ۰/۷۵      | ۰/۳۴          |
| ۳     | ۰/۷۵            | ۱         | ۰/۲۵          | ۰/۸۷۵     | -۰/۱۸         |
| ۴     | ۰/۷۵            | ۰/۸۷۵     | ۰/۱۲۵         | ۰/۸۱۲     | ۰/۱۱          |
| ۵     | ۰/۸۱۲           | ۰/۸۷۵     | ۰/۰۶۳         | ۰/۸۴۳     | ۰/۰۲          |
| ۶     | ۰/۸۴۳           | ۰/۸۷۵     | ۰/۰۳۲         | ۰/۸۵۹     |               |

## بدون محدودیت تک‌متغیره - روش جست و جوی تک‌بعدی

### گام‌های الگوریتم برای مساله max سازی:

- ❖ یک حد بالا و پایین برای جواب معادله  $f'(x) = 0$  به دست آورید و به ترتیب آن‌ها را  $\bar{x}$  و  $\underline{x}$  بنامید.
- ❖ علامت مشتق در  $\bar{x}$  و  $\underline{x}$  به ترتیب منفی و مثبت است.

گام ۱

- ❖ نقطه میانی نقاط  $\bar{x}$  و  $\underline{x}$  را با رابطه  $\hat{x} = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$  محاسبه کنید و مقدار مشتق آن  $f'(\hat{x})$  را به دست آورید.

گام ۲

- ❖ اگر  $f'(\hat{x}) > 0$  باشد،  $\hat{x}$  را با  $\underline{x}$  جایگزین کنید و اگر  $f'(\hat{x}) < 0$  باشد،  $\hat{x}$  را با  $\bar{x}$  جایگزین نمایید.

گام ۳

- ❖ در صورتی که مقدار خطای  $\varepsilon = \bar{x} - \underline{x}$  کمتر از مقدار خطای مجاز باشد، توقف کنید. جواب معادله برابر با  $\hat{x} = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$  است.

گام ۴

- ❖ در غیر این صورت به گام ۲ برگردید.

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش معادله گرادیان

$X^*$  یک جواب بهینه نسبی برای تابع  $f(X): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  است اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

$\nabla f(X^*) = 0$  : شرط لازم: }  
 شرط کافی: ماتریس هسین  $H(X^*)$  مثبت باشد } Min سازی

$\nabla f(X^*) = 0$  : شرط لازم: }  
 شرط کافی: ماتریس هسین  $H(X^*)$  منفی باشد } Max سازی

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش معادله گرادیان

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \nabla f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad H(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش معادله گرادیان

✓ ماتریس هسین همیشه مثبت: اگر تمام زیر دترمینان‌های آن مثبت باشد.

$$H(X) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{همیشه مثبت}} h_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \cdots \quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

زیردترمینان

اول

زیردترمینان

دوم

زیردترمینان

ام n

✓ ماتریس هسین همیشه منفی: اگر زیردترمینان  $k$  ام دارای علامت  $(-1)^k$  باشد. یعنی زوج‌ها دارای علامت مثبت و فردها دارای علامت منفی باشند.

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش معادله گرادیان

**مثال:** جواب بهینه نسبی مساله  $\max f(X) = x_1^3 - 3x_1 + x_2^2$  را به دست آورید.



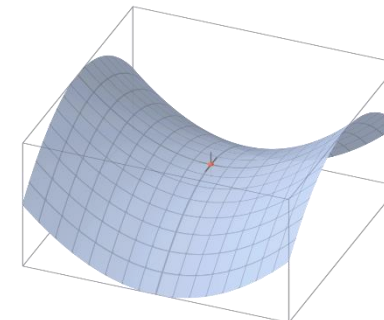
$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \hat{X} = \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}$$

یا max  
یا min

یا max  
یا min

$$H(X) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H(\hat{X}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \succ 0 \Rightarrow \text{min نسبی} \\ H(X') = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Saddle point} \end{cases}$$

مساله دارای جواب  
بهینه نیست



## بدون محدودیت چندمتغیره - روش معادله گرادیان

**مثال:** جواب بهینه نسبی مساله  $\min f(X) = x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 + x_1x_2$  را به دست آورید.



$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3 + x_2 \\ 2x_2 + x_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \hat{X} = \begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{pmatrix}$$

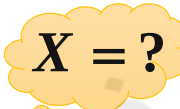
یا max  
؟min

$$H(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow H(X) \succ 0 \Rightarrow \hat{X} \text{ min نسبی و جهانی است}$$

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش معادله گرادیان

 **مثال:** جواب بهینه نسبی مساله  $\min f(X) = x_1^5 + x_1 x_2^4 - x_2^2$  را به دست آورید.

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 5x_1^4 + x_2^4 \\ 4x_1 x_2^3 - 2x_2 \end{pmatrix} = 0$$

  $X = ?$



**الگوریتم جست و جوی گرادیان**

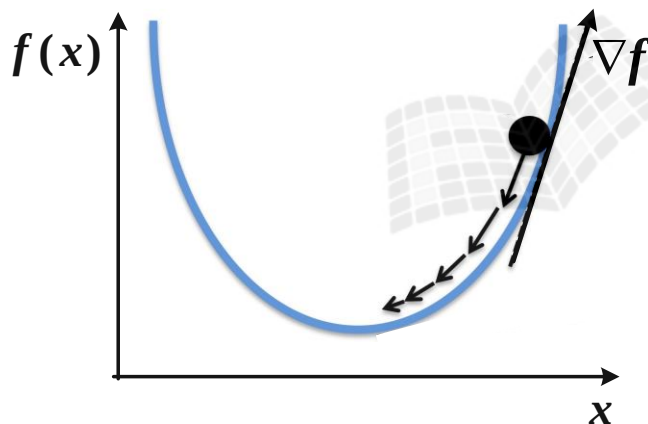
## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان

بردار گرادیان جهت بیشترین **افزایش** را نشان می‌دهد.



برای مساله Max سازی، در جهت بردار گرادیان جست و جو می‌کنیم.

در مساله Min سازی، در خلاف جهت بردار گرادیان



رویکرد الگوریتم: از یک نقطه اولیه، در **جهت** بردار گرادیان **آن‌قدر** حرکت می‌کنیم تا دیگر امکان افزایش نداشته باشیم.

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان

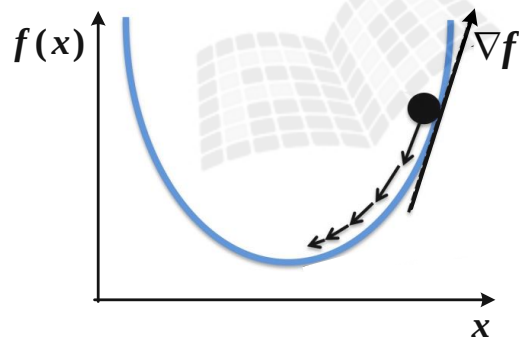
گام‌های الگوریتم برای مساله max سازی:

❖ از یک نقطه اولیه، در **جهت** بردار گرادیان **آن قدر** حرکت می‌کنیم تا دیگر امکان افزایش نداشته باشیم.

گام ۱

❖ در نقطه جدید، مجدداً گرادیان را محاسبه می‌کنیم. اگر مقدار گرادیان نزدیک به صفر باشد، توقف می‌کنیم. همان نقطه، تخمین مناسبی از نقطه بهینه است. در غیر این صورت با گرادیان جدید، عملیات گام قبل را تکرار می‌کنیم.

گام ۲



## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان

$$\hat{X} = X' + t^* \nabla f(X')$$

$\left. \begin{array}{l} \hat{X} : \text{نقطه جدید} \\ X' : \text{نقطه جاری} \\ t : \text{گام حرکت} \\ \varepsilon : \text{مقدار خطای مجاز} \end{array} \right\}$

محاسبه مقدار بهینه گام حرکت  $(t^*)$ :

$$f(X' + t^* \nabla f(X')) = \max_{t \geq 0} \{f(X' + t \nabla f(X'))\}$$

شرط توقف در نقطه جاری  $\hat{X}$ :

$$|\nabla f(\hat{X})| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \hat{x}_j} \right| \leq \varepsilon \quad \forall j$$

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان

 **مثال:** جواب بهینه نسبی مساله  $\max f(x) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$  را به دست آورید  $(\varepsilon = 0.25)$ .

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x_2 - 2x_1 \\ 2x_1 + 2 - 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f(X') = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\max_{t \geq 0} f(\hat{X}) = \max_{t \geq 0} \{-8t^2 + 4t\} \Rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

تکرار  
اول

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان

$$X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \nabla f(X') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\max_{t \geq 0} f(\hat{X}) = \max_{t \geq 0} \left\{ -t^2 + t + \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow t^* = \frac{1}{2}$$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

تکرار  
دوم

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \nabla f(X') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} + t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\max_{t \geq 0} f(\hat{X}) = \max_{t \geq 0} \left\{ -2t^2 + t + \frac{3}{4} \right\} \Rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

تکرار  
سوم

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} \quad \nabla f(X') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ 2 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\max_{t \geq 0} f(\hat{X}) = \max_{t \geq 0} \left\{ -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{7}{8} \right\} \Rightarrow t^* = \frac{1}{2}$$

تکرار  
چهارم

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} \quad \nabla f(X') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\max_{t \geq 0} f(\hat{X}) = \max_{t \geq 0} \left\{ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{15}{16} \right\} \Rightarrow t^* = \frac{1}{4}$$

تکرار  
پنجم

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان

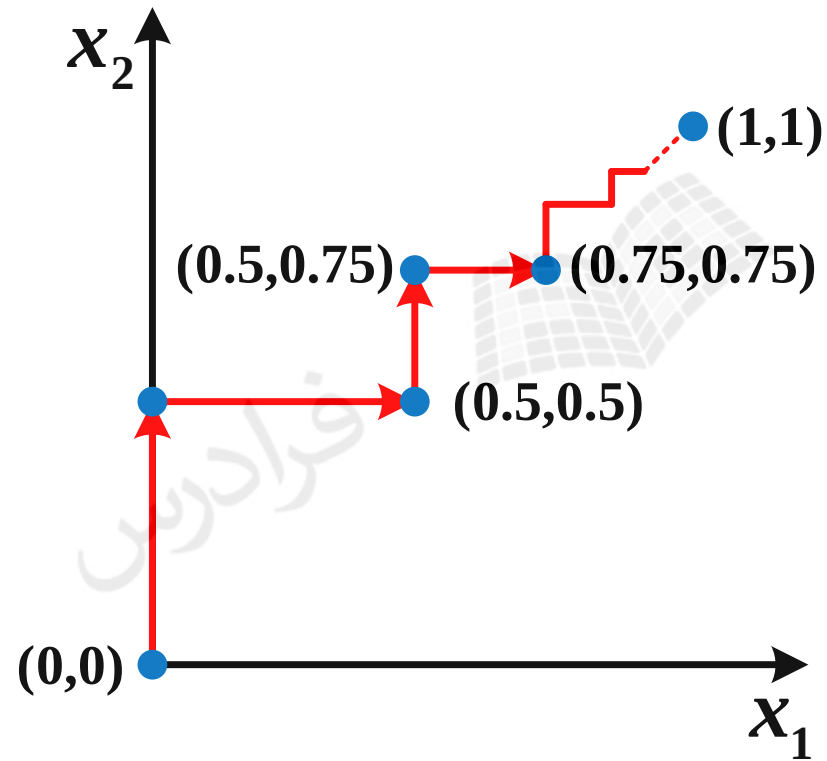
$$X' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \nabla f(X') = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{|\nabla f(\hat{X})| \leq 0.25} \text{توقف}$$

تکرار  
ششم

$$X' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

جواب تقریبی  
معادله

## بدون محدودیت چندمتغیره - روش جست و جوی گرادیان



## با محدودیت مساوی - روش لاگرانژ

حتی بدون  
محدودیت  
علامت متغیرها

$$\begin{cases} \max f(X) \\ \text{s.t. } h_j(X) = 0 \quad \forall j \end{cases}$$

تابع لاگرانژ

$$L(X, \lambda) = f(X) - \sum_j \lambda_j h_j(X)$$

$$\begin{cases} \min f(X) \\ \text{s.t. } h_j(X) = 0 \quad \forall j \end{cases}$$

تابع لاگرانژ

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_j \lambda_j h_j(X)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0 \quad \forall i \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

شرط لازم بهینگی

## با محدودیت مساوی - روش لاگرانژ

**مثال:** جواب بهینه نسبی مساله را به دست آورید. 

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 4x_1^2 + 5x_2^2 \\ \text{s.t. } 2x_1 + 3x_2 &= 6 \end{aligned}$$



$$L(X, \lambda) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 6)$$

## با محدودیت مساوی - روش لاگرانژ

$$L(X, \lambda) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 6)$$



۳ معادله و  
۳ مجهول

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 8x_1 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lambda^* = -4.286 \\ x_1^* = 1.071 \\ x_2^* = 1.286 \end{cases}$$

## با محدودیت - روش KKT

$X^*$  یک جواب بهینه نسبی برای مساله زیر است اگر بتوان  $u_i$  و  $\lambda_j$  هایی یافت که ۴ شرط زیر برقرار باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f(X) \\ \text{s.t. } g_i(X) \leq 0 \quad \forall i \\ h_j(X) = 0 \quad \forall j \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \nabla f(X^*) = \sum_i u_i \nabla g_i(X^*) + \sum_j \lambda_j \nabla h_j(X^*) \\ (2) u_i g_i(X^*) = 0 \quad \forall i \\ (3) u_i \geq 0 \quad \forall i \\ (4) g_i(X^*) \leq 0 \quad \forall i \\ h_j(X^*) = 0 \quad \forall j \end{array} \right.$$

شرایط KKT، شرط لازم بهینگی است.

## با محدودیت - روش KKT

 **مثال:** جواب بهینه نسبی مساله را به دست آورید.

$$\max f(x) = \ln(x_1 + 1) + x_2$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



$$\max f(x) = \ln(x_1 + 1) + x_2$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 - 3 \leq 0$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

## با محدودیت - روش KKT

$$\begin{aligned} \max f(x) &= \ln(x_1 + 1) + x_2 \\ \text{s.t. } 2x_1 + x_2 - 3 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 + 1} \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1 + 1} = 2u_1 - u_2 \\ 1 = u_1 - u_3 \Rightarrow u_1 \geq 1 \quad (a) \end{cases}$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} u_1(2x_1 + x_2 - 3) = 0 \xRightarrow{(a)} 2x_1 + x_2 = 3 \quad (b) \\ u_2(-x_1) = 0 \Rightarrow u_2 x_1 = 0 \\ u_3(-x_2) = 0 \Rightarrow u_3 x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2 = 0 \rightarrow (b) \times \\ u_2, u_3 = 0 \rightarrow u_1 = 1, x_1 = -0.5 \times \\ x_2, u_2 = 0 \rightarrow x_1 = 1.5, u_1 = 0.2, u_3 = -0.8 \times \\ x_1, u_3 = 0 \rightarrow u_1 = 1, u_2 = 1, x_2 = 3 \quad (c) \end{array} \right.$$

$$(3) u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

$$(4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_2 = 3 \\ u_1 &= 1, u_2 = 1, u_3 = 0 \end{aligned}$$

## با محدودیت - روش KKT

**نکته:** از روش KKT معمولا به تنهایی برای یافتن جواب بهینه استفاده نمی‌شود چون بسیار پیچیده و معمولا غیرممکن است.

این روش بیشتر برای بررسی بهینه بودن یک جواب پیشنهادی، مناسب است.

## با محدودیت - روش KKT



**مثال:** آیا جواب  $X = (0, 5)$  می‌تواند یک جواب بهینه برای مساله زیر باشد؟ آیا شرایط

برنامه‌ریزی محدب برقرار است؟

$$\max f(x) = \ln(x_1 + x_2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



$$\max f(x) = \ln(x_1 + x_2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 - 5 \leq 0$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

$$H(X) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(x_1 + x_2)^2} & \frac{-1}{(x_1 + x_2)^2} \\ \frac{-1}{(x_1 + x_2)^2} & \frac{-1}{(x_1 + x_2)^2} \end{pmatrix}$$



- محدودیت‌ها خطی هستند.

- تابع هدف مقعر است.

## با محدودیت - روش KKT

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 + x_2} \\ \frac{1}{x_1 + x_2} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1 + x_2} = u_1 - u_2 \Rightarrow u_2 = 0 \\ \frac{1}{x_1 + x_2} = u_1 - u_3 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u_1(x_1 + x_2 - 5) = 0 \quad \checkmark \\ u_2(-x_1) = 0 \Rightarrow u_2 x_1 = 0 \quad \checkmark \\ u_3(-x_2) = 0 \Rightarrow u_3 x_2 = 0 \Rightarrow u_3 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad u_1, u_2, u_3 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \quad \checkmark \\ -x_1 \leq 0 \quad \checkmark \\ -x_2 \leq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$X = (0, 5)$  جواب

بهینه است.

$$\max f(x) = \ln(x_1 + x_2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 - 5 \leq 0$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

## با محدودیت - روش KKT

**مثال:** آیا جواب  $X = (0, 5)$  می‌تواند یک جواب بهینه برای مساله زیر باشد؟ 

$$\min f(x) = \ln(x_1 + x_2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



$$\max -f(x) = -\ln(x_1 + x_2)$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 - 5 \leq 0$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$-x_2 \leq 0$$

## با محدودیت - روش KKT

$$(1) \begin{pmatrix} \frac{-1}{x_1 + x_2} \\ \frac{-1}{x_1 + x_2} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{x_1 + x_2} = u_1 - u_2 \\ \frac{-1}{x_1 + x_2} = u_1 - u_3 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_1(x_1 + x_2 - 5) = 0 \\ u_2(-x_1) = 0 \Rightarrow u_2 x_1 = 0 \\ u_3(-x_2) = 0 \Rightarrow u_3 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_3 = 0$$

$$(3) u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$X = (0, 5)$  جواب  
بهینه نیست.

$$\begin{aligned} \max -f(x) &= -\ln(x_1 + x_2) \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 - 5 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس  
«آموزش تحقیق در عملیات ۳»  
تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

[faradars.org/fvtior122](https://faradars.org/fvtior122)