

به نام خدا

# ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

Applications of Mathematics in Management

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم تحقیقات

منابع:

ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (جلد دوم) - نشر نی - محمدحسین پورکافمی  
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (جلد دوم) - گسترش علوم پایه - مسعود نیکوکار

توابع چند متغیره

تابع  $f$  که قلمرو آن زیر مجموعه‌ای از  $R^n$  و برد آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد، یک تابع  $n$  متغیره نام دارد.

اگر  $f$  یک تابع  $n$  متغیره باشد، هر عنصر قلمرو آن،  $n$  تایی مرتب  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  است و مقدار تابع در این نقطه را با  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  نشان می‌دهیم.

### اعمال جبری در توابع چندمتغیره:

$$۱) (f \pm g)(X) = f(X) \pm g(X)$$

$$۲) (k f)(X) = k f(X) \quad , k \in R$$

$$۳) (f g)(X) = f(X) g(X)$$

$$۴) \left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \quad , g(X) \neq 0$$

**حد و پیوستگی توابع چند متغیره**

# تعریف

فرض کنیم  $f$  یک تابع چند متغیره باشد. حد تابع  $f$  در نقطه  $A$  برابر / است اگر و تنها اگر برای هر عدد مثبت و دلخواه  $\varepsilon$  ، عدد مثبتی مانند  $\delta$  یافت شود به طوری که از قرار داشتن نقطه  $X$  در همسایگی نقطه  $A$  به شعاع  $\delta$  نتیجه شود که مقدار تابع  $f(X)$  در

همسایگی / به شعاع  $\varepsilon$  قرار دارد. 
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |X - A| < \delta \Rightarrow |f(X) - l| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر در همسایگی نقطه  $A$  مقادیر تابع به هر اندازه دلخواه می‌توانند به /

نزدیک شوند. در این صورت می‌نویسیم: 
$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = l$$

مثلا در یک تابع دو متغیره می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$

حد توابع سه متغیره و به طور کلی  $n$  متغیره به طور مشابه با توابع دو متغیره تعریف می‌شود. به همین دلیل از این قسمت، قضایا و خواص مربوط به حد و پیوستگی را صرفاً در مورد توابع دو متغیره مطرح می‌کنیم.

قضیه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = a$$

اگر  $f(x,y) = x$  و  $g(x,y) = y$  باشد، آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = b$$

قضیه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = k$$

اگر  $f(x,y) = k$  تابعی ثابت باشد، آنگاه

قضیه:

اگر  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$  باشد، آنگاه

(الف)  $\lim_{(a,y) \rightarrow (a,b)} f(a,y) = l$  (ب)  $\lim_{(x,b) \rightarrow (a,b)} f(x,b) = l$

این قضیه بیان می کند که اگر  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$  آنگاه حد تابع  $f$  وقتی که نقطه  $(x,y)$

در مسیرهای  $x = a$  یا  $y = b$  به نقطه  $(a,b)$  میل کند، برابر  $l$  است.

قضیه:

اگر حد تابع  $f$  هنگامی که  $(x, y)$  بر روی دو مسیر متمایز به نقطه‌ی  $(a, b)$  نزدیک می‌شود، متفاوت باشد؛ آنگاه حد تابع  $f$  در این نقطه وجود ندارد.

نتیجه:

اگر  $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) \neq \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$  ، آنگاه  $f$  در نقطه  $(a, b)$  حد ندارد.

قضیه:

اگر  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l_1$  و  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = l_2$  باشد، آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (kf)(x,y) = kl_1 \quad (\text{ب}) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \pm g)(x,y) = l_1 \pm l_2 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left( \frac{f}{g} \right)(x,y) = \frac{l_1}{l_2}, \quad l_2 \neq 0 \quad (\text{ت}) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \times g)(x,y) = l_1 \times l_2 \quad (\text{پ})$$

# تعریف پیوستگی

تابع دو متغیره‌ی  $f$  را در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته می‌نامیم اگر و تنها اگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

حالت‌های ناپیوستگی:

(۱) تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  تعریف نشده باشد.

(۲)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  وجود نداشته باشد.

(۳)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \neq f(a,b)$

قضیه: اگر  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$  و تابع یک متغیره  $g$  در  $L$  پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (g \circ f(x,y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (g(f(x,y))) = g\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y))\right) = g(l)$$

قضیه: اگر توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $(a,b)$  پیوسته باشند، آنگاه توابع  $f+g$ ،  $f-g$ ،  $kf$ ،  $(fg)$  و  $(f/g)$  در نقطه  $(a,b)$  پیوسته هستند. (برای پیوستگی  $f/g$  باید  $g(a,b)$  مخالف صفر باشد.)

قضیه: اگر تابع دو متغیره  $f$  در نقطه  $(a,b)$  و تابع یک متغیره  $g$  در  $f(a,b)$  پیوسته باشند، آنگاه تابع مرکب  $g \circ f$  در نقطه  $(a,b)$  پیوسته است.

مشتق‌های جزئی

# تعریف

فرض کنیم  $f$  تابعی از دو متغیر  $x$  و  $y$  باشد. اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$  موجود و متناهی باشد، مقدار این حد را مشتق جزئی  $f$  نسبت به متغیر  $x$  در نقطه‌ی  $(x, y)$  می‌نامیم و آن را با یکی از نمادهای  $f_x(x, y)$  یا  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  نمایش می‌دهیم.

به همین ترتیب:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

مشتق‌های جزئی  $\frac{\partial f}{\partial x}$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}$  را مشتق جزئی مرتبه اول  $f$  نسبت به متغیرهای  $x$  و  $y$  گویند.

## مشتق‌های جزئی مرتبه‌های بالاتر

$$۱) f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$۲) f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$۳) f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$۴) f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

نظیر مفهوم مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر برای توابع یک متغیره، می‌توان مشتق‌های جزئی مرتبه‌های بالاتر را برای توابع چند متغیره نیز تعریف کرد. اگر  $f$  تابعی از دو متغیر  $x$  و  $y$  باشد، آنگاه  $f_x$  و  $f_y$  نیز توابعی از متغیرهای  $x$  و  $y$  هستند. پس می‌توان مشتق‌های جزئی توابع  $f_x$  و  $f_y$  را تعریف کرد.

قضیه: فرض کنیم  $f$  تابعی با متغیرهای  $x$  و  $y$  باشد. اگر توابع  $f_{yx}$  و  $f_{xy}$  در

نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته باشند، آنگاه:

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

**دیفرانسیل کامل و مشتق گیری ضمنی**

# تعریف

فرض کنیم  $f$  تابعی با دو متغیر  $x$  و  $y$  باشد. اگر مشتق‌های جزئی مرتبه اول  $f$  وجود داشته باشند، دیفرانسیل کامل تابع  $f$  را با  $df$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم به طوری که در آن  $dx$  و  $dy$  به ترتیب دیفرانسیل متغیرهای  $x$  و  $y$  هستند.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

تعریف دیفرانسیل کامل برای توابع چند متغیره در حالت کلی، به صورت زیر می‌باشد.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

# تعریف

فرض کنیم  $f$  تابعی با متغیرهای  $x$  و  $y$  باشد. اگر مشتق‌های جزئی مرتبه‌ی اول  $f$  بر روی ناحیه‌ای پیوسته باشد، آنگاه مشتق تابع  $f$  نسبت به  $t$  را با  $df/dt$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

تعریف مشتق کامل برای توابع چند متغیره در حالت کلی، به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

## قاعده زنجیره‌ای برای مشتق جزئی در توابع چند متغیره

فرض کنیم  $f$  تابعی با متغیرهای  $x$  و  $y$  باشد. اگر متغیرهای  $x$  و  $y$  خود تابعی از دو متغیر  $u$  و  $v$  باشند، آنگاه مشتق‌های جزئی مرتبه‌ی اول  $f$  نسبت به متغیرهای  $u$  و  $v$  به صورت زیر قابل محاسبه هستند.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

به طریق مشابه قاعده زنجیره‌ای برای بیش از دو متغیر نیز قابل تعمیم می‌باشد.

# مشتق‌گیری ضمنی

به کمک مفهوم مشتق جزئی، می‌توان دستور ساده‌ای برای مشتق‌گیری از توابع دو متغیره ضمنی (غیر صریح)، به دست آورد.

فرض کنیم معادله‌ی  $f(x, y) = 0$  ، متغیر  $y$  را به صورت تابعی از  $x$  به طور ضمنی تعریف کند و مشتق‌های جزئی  $\frac{\partial f}{\partial x}$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}$  وجود داشته باشند و همچنین  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$  ، آنگاه مشتق  $y$  نسبت به  $x$  به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

**ماكسيم و مينيم توابع دو متغيره**

# تعریف

فرض کنیم  $f$  تابعی با متغیرهای  $x$  و  $y$  باشد. در این صورت:

الف)  $f(a, b)$  را **ماکسیمم مطلق**  $f$  می‌نامیم، اگر برای هر  $(x, y)$  از قلمرو  $f$  داشته باشیم:

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

ب)  $f(a, b)$  را **مینیمم مطلق**  $f$  می‌نامیم، اگر برای هر  $(x, y)$  از قلمرو  $f$  داشته باشیم:

$$f(x, y) \geq f(a, b)$$

# تعریف

فرض کنیم  $f$  تابعی با متغیرهای  $x$  و  $y$  باشد. در این صورت:

الف)  $f(a, b)$  را **ماکسیمم نسبی**  $f$  می‌نامیم، اگر دایره‌ای به مرکز  $(a, b)$  وجود داشته باشد که برای هر  $(x, y)$  از آن داشته باشیم:

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

ب)  $f(a, b)$  را **مینیمم نسبی**  $f$  می‌نامیم، اگر دایره‌ای به مرکز  $(a, b)$  وجود داشته باشد که برای هر  $(x, y)$  از آن داشته باشیم:

$$f(x, y) \geq f(a, b)$$

**قضیه:** فرض کنیم تابع دو متغیره  $f$  در  $(a,b)$  یک ماکسیمم یا مینیمم نسبی دارد.  
اگر مشتق‌های جزئی مرتبه‌ی اول  $f$  در  $(a,b)$  موجود باشند، آنگاه:

$$f_x(a,b) = 0, \quad f_y(a,b) = 0$$

نتیجه: اگر تابع  $f$  در  $(a,b)$  یک ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد، آنگاه  $(a,b)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

یک جواب دستگاه دو مجهولی زیر است. به هر جواب این دستگاه  
یک نقطه بحرانی تابع  $F$  گفته می‌شود که لزوماً نقطه اکسترمم نیست.

مثال: مختصات نقاط بحرانی تابع  $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy - 2x + 3y$  را به دست

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y + x + 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 7x - 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{7}, y = \frac{-8}{7}$$

آورید.

اگر  $f_x(a,b) = 0$  ،  $f_y(a,b) = 0$  ولی تابع  $f$  در  $(a,b)$  ماکسیمم یا مینیمم نسبی نداشته باشد؛ می‌گوییم تابع  $f$  در  $(a,b)$  دارای یک نقطه‌ی زینی (زین اسبی) است.

مثال: اکستریم‌های توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$۱) f(x, y) = ۱ + x^2 + ۳y^2$$

$$۲) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$۳) f(x, y) = y^2 - xy + ۲x + y + ۱$$

# آزمون مشتق دوم

فرض کنیم  $f$  تابعی با متغیرهای  $x$  و  $y$  و  $f_y(a,b) = 0$  ،  $f_x(a,b) = 0$  باشد. همچنین

فرض کنیم مشتقهای جزئی  $f$  درون دایره‌ای به مرکز  $(a,b)$  پیوسته باشند. تعریف

می‌کنیم  $f_{yy}(a,b) f_{xx}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2 = \Delta(a,b)$  . در این صورت:

(۱) اگر  $\Delta > 0$  ، نقطه  $(a,b)$  یک نقطه زینی است.

(۲) اگر  $\Delta < 0$  و  $f_{xx}(a,b) > 0$  ، نقطه  $(a,b)$  یک نقطه مینیمم نسبی است.

(۳) اگر  $\Delta < 0$  و  $f_{xx}(a,b) < 0$  ، نقطه  $(a,b)$  یک نقطه ماکزیمم نسبی است.

(۴) اگر  $\Delta = 0$  ، آزمون بی نتیجه است.

مثال: اکستریم‌های توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$۱) f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 3$$

$$۲) f(x, y) = xy$$

$$۳) f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^3 - 15x + 2$$

*ماكسيم و مينيم مشروط*

در اکثر مسایل مدیریت و اقتصاد تعیین ماکسیمم و مینیمم یک تابع چند متغیره با توجه به یک یا چند شرط صورت می‌گیرد.

برای مثال فرض کنید هدف یک مصرف‌کننده به حداکثر رسانیدن مطلوبیت در مصرف دو کالای ۱ و ۲ است. اگر قیمت این دو کالا به ترتیب برابر با  $p_1$  و  $p_2$  و میزان مصرف او از این دو کالا به ترتیب با  $x_1$  و  $x_2$  نمایش داده شود و مصرف‌کننده محدودیت درآمدی داشته باشد.

پس مطلوبیت این مصرف‌کننده تابعی از میزان استفاده او از این دو کالا بوده و میزان مخارج مصرفی او بابت این دو کالا باید با میزان درآمد او نیز برابر باشد. به بیان دیگر می‌توان گفت که این مصرف‌کننده می‌خواهد مطلوبیت خود را با توجه به محدودیت درآمد به حداکثر برساند.

پس باید ماکسیمم تابع  $U=f(x_1, x_2)$  را نسبت به شرط (محدودیت)  $P_1x_1+p_2x_2=y$  پیدا کنیم که در آن  $U=f(x_1, x_2)$  تابع مطلوبیت است.

به دو روش می‌توان ماکزیمم و مینیمم مشروط را به دست آورد. یکی به روش جایگزینی و دیگری به روش لاگراتژ.

## روش جایگزینی:

یکی از روشهای به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم توابع نسبت به شرایط داده شده از طریق جایگزین کردن تابع محدودیت ( شرایط داده شده ) در تابع مطلوبیت است. بدین ترتیب مساله تبدیل به مساله‌ی ماکزیمم یا مینیمم کردن یک تابع بدون محدودیت می‌شود.

مثلا برای به دست آوردن ماکزیمم تابع  $U=f(x_1,x_2)$  نسبت به شرط  $P_1x_1+p_2x_2=y$  کافی است در تابع مطلوبیت مقدار  $x_1=(y-p_2x_2)/p_1$  را جایگزین کنیم.

## روش لاگرانژ:

برای به دست آوردن ماکسیمم یا مینیمم تابع دو متغیره‌ی  $f(x, y)$  با محدودیت  $g(x, y)=0$  متغیر جدید  $\lambda$  موسوم به ضریب لاگرانژ را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن تابع جدیدی به نام تابع لاگرانژ را به صورت  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$  تعریف می‌کنیم. ماکسیمم یا مینیمم تابع دو متغیره‌ی  $f$  در صورت وجود، جواب دستگاه معادلات زیر است.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

## قضیه: شرط کافی برای وجود ماکسیمم و مینیمم مشروط

فرض کنیم تابع دو متغیره‌ی  $f(x,y)$  تحت محدودیت  $g(x,y)=0$  داده شده باشد و  $F(x,y,\lambda)$  تابع لاگرانژ متناظر باشد.

(الف) شرط کافی برای وجود ماکسیمم نسبی آن است که:

$$\begin{vmatrix} \bullet & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} > \bullet$$

(ب) شرط کافی برای وجود مینیمم نسبی آن است که:

$$\begin{vmatrix} \bullet & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} < \bullet$$

مثال: اکستریم‌های توابع زیر را در صورت وجود با روش لاگرانژ به دست آورید.

$$۲) f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{if } x + ۲y = ۵$$

$$۲) f(x, y) = ۵x^2 + ۶y^2 - xy \quad \text{if } x + ۲y = ۲۴$$

$$۳) f(x, y) = xy \quad \text{if } ۲x + y = ۸$$

$$۴) f(x, y) = -x^2 - y^2 + ۱ \quad \text{if } x - y = ۰$$

## تعمیم روش لاگراتژ

روش لاگراتژ را برای تابع  $n$  متغیره  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  با توابع محدودیت  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  که در آن  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  می‌باشد، به صورت زیر تعمیم داد.

تابع لاگراتژ تعمیم یافته:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

از مساوی صفر قرار دادن مشتق‌های جزئی تابع لاگراتژ، دستگاهی شامل  $n+k$  معادله و  $n+k$  مجهول به دست می‌آید که با حل آن نقاط اکسترمم تابع به دست می‌آیند.