

به نام خدا

# ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

Applications of Mathematics in Management

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم تحقیقات

منابع:

- ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (جلد دوم) - نشر نی - محمدحسین پورکاظمی  
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (جلد دوم) - گسترش علوم پایه - مسعود نیکوکار

دستگاه معادلات خطی

و

توابع خطی

# دستگاه معادلات خطی

معادله‌ای به صورت  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$  را یک معادله ی  $n$  مجهولی خطی می‌نامیم.

$n$ تایی مرتب  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  از اعداد حقیقی، که در این معادله صدق کنند را یک جواب معادله می‌نامیم.

همچنین مجموعه‌ای از معادلات خطی زیر را یک دستگاه  $m$  معادله‌ی خطی  $n$  مجهولی می‌نامیم.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

در صورتی که  $n$ تایی مرتب  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

در تمام معادلات دستگاه صدق کند،

آن را یک جواب دستگاه می‌نامیم.

# فرم ماتریسی دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{Then } \boxed{AX = B}$$

# قضیه

اگر تعداد مجهول‌ها  $(n)$  با تعداد معادله‌های مستقل  $(m)$  در یک دستگاه معادلات خطی برابر باشد  $(m=n)$  و ماتریس ضرایب، وارون پذیر باشد، آنگاه دستگاه همواره دارای یک جواب منحصر به فرد است.

توجه:

✓ اگر تعداد مجهول‌ها  $(n)$  از تعداد معادله‌های مستقل  $(m)$  در یک دستگاه معادلات خطی کمتر باشد، ابتدا به تعداد مجهول‌ها  $(n)$  از معادلات انتخاب می‌کنیم. پاسخ به دست آمده از  $n$  معادله و  $n$  مجهول در صورتی که در سایر معادلات صدق کند، پاسخ کلی دستگاه است و در غیر اینصورت دستگاه جواب ندارد.

✓ اگر تعداد مجهول‌ها  $(n)$  از تعداد معادله‌های مستقل  $(m)$  در یک دستگاه معادلات خطی بیشتر باشد، دستگاه بیشمار جواب دارد و به اندازه اختلاف تعداد مجهول‌ها و معادلات  $(n-m)$  درجه آزادی در انتخاب دلخواه مقادیر متغیرها داریم. بدیهی است بعد از انتخاب متغیرهای آزاد، دستگاه  $n$  معادله و  $n$  مجهول باقیمانده را برای بدست آوردن مقادیر سایر متغیرها حل می‌کنیم.

# روش‌های حل دستگاه معادلات خطی

منظور از حل یک دستگاه معادلات خطی، یافتن  $n$  تایی مرتبی همچون  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  است که در تمام معادلات دستگاه صدق کند. در حالت کلی یک دستگاه معادلات خطی، ممکن است تنها یک جواب یا بیشمار جواب داشته باشد یا اصلاً جوابی نداشته باشد.

در این فصل به معرفی دو روش حل دستگاه معادلات خطی  $n$  معادله و  $n$  مجهول اشاره می‌کنیم.

۱ – روش حذفی گوس

۲ – روش کرامر

## روش حذف گوسی

در این روش با استفاده از عملیات سطری که در ماتریس‌ها به آن اشاره شد، ماتریس مرکب  $[A | B]$  را تبدیل به  $[I | B']$  می‌کنیم و در این صورت ماتریس  $B'$  نشان دهنده جواب‌های دستگاه معادلات خطی است.

البته در حالت‌های خاص که دستگاه دارای بیشمار جواب است یا جوابی ندارد، ملاحظات وجود دارد که در قالب مثال به آن اشاره خواهیم کرد.

در واقع پاسخ به دست آمده از روش حذفی گوس، در حالت کلی به شکل زیر خواهد بود.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

# روش حذف گوسی - مثال

دستگاه معادلات خطی مقابل را از روش حذفی گوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_3=R_3-R_1}]{R_2=R_2-R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2=-\frac{1}{2}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\substack{R_3=-\frac{1}{2}R_3}]{R_1=R_1-R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1=R_1-R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# روش حذف گوسی - مثال

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

دستگاه معادلات خطی مقابل را از روش حذفی گوس حل کنید.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_3 = R_3 - 3R_1}]{R_2 = R_2 - R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 = -\frac{1}{2}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 = R_3 + 2R_2}]{R_1 = R_1 - R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

وجود سطر صفر در ماتریس ضرایب نشان میدهد که دترمینان ماتریس ضرایب

برابر صفر است و با توجه به اینکه مقدار سمت راست، صفر به دست آمده، معلوم

میشود معادلات مستقل نبوده و بیشمار جواب وجود دارد.

مثلا اگر مقدار  $x_3 = 0$  را در دو معادله اول در نظر بگیریم، از حل دستگاه خواهیم داشت:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$   $x_1 = 4$  ,  $x_2 = 2$

# روش حذف گوسی - مثال

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

دستگاه معادلات خطی مقابل را از روش حذفی گوس حل کنید.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{R_3 = R_3 - 3R_1}]{R_2 = R_2 - R_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 = -\frac{1}{2}R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[\substack{R_3 = R_3 + 2R_2}]{R_1 = R_1 - R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

وجود سطر صفر در ماتریس ضرایب نشان میدهد که دترمینان ماتریس ضرایب

برابر صفر است و با توجه به اینکه مقدار سمت راست، مخالف صفر به دست آمده،

معلوم میشود دستگاه معادلات جواب ندارد. زیرا همه ضرایب در یکی از معادلات صفر هستند و مقدار سمت راست مخالف صفر؛ که این غیر ممکن است.

## روش کرامر

اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهولی وارون پذیر باشد آنگاه جواب‌های دستگاه از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

که در آن  $A_i$  ماتریس حاصل از جایگزین کردن ماتریس ستونی در ستون  $i$ ام ماتریس  $A$  است.

در ستون  $i$ ام

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

## روش کرامر – مثال

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

دستگاه معادلات خطی مقابل را از روش کرامر حل کنید.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6(1-1) - (-2-0) + (2-0)}{((-1)(-1) - (1)) - (-1-1) + (1-(-1))} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{12}{4} = 3$$

# دستگاه معادلات خطی همگن

اگر در یک دستگاه  $m$  معادله  $n$  مجهول خطی، در طرف دوم معادلات، تمام مقادیر صفر باشند، دستگاه را همگن می‌نامیم. روشن است که در دستگاه همگن، همواره  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  یک جواب دستگاه است. این جواب به جواب بدیهی دستگاه موسوم است.

قضیه: دستگاه خطی  $n$  معادله و  $n$  مجهول همگن، دارای یک جواب غیربدیهی (غیرصفر) است، اگر و تنها اگر دترمینان ضرایب معادلات، صفر باشد.

نتیجه: یک دستگاه خطی  $m$  معادله  $n$  مجهول همگن، همواره دارای یک جواب غیربدیهی (غیر صفر) است، اگر  $m < n$  باشد.

قضیه: اگر  $x_1$  و  $x_2$  دو جواب دستگاه غیرهمگن  $AX = B$  باشند، آنگاه  $x_2 - x_1$  جوابی برای دستگاه همگن  $AX = 0$  است.

نتیجه: دستگاه غیرهمگن  $AX = B$  دارای جواب منحصر به فرد است، اگر و تنها اگر جواب  $AX = 0$  منحصر به فرد باشد.

**استقلال خطی**

**و**

**وابستگی خطی**

# تعریف

مجموعه‌ی  $m$  بردار  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_m$  از عناصر فضای برداری  $R^n$  را **مستقل خطی** می‌نامیم، اگر و فقط اگر از معادله

$$C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + \dots + C_m \vec{V}_m = \vec{0} \quad \text{به طور منحصر به فرد نتیجه شود: } C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$$

همین در صورتی که برای معادله  $C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + \dots + C_m \vec{V}_m = \vec{0}$  جوابی غیر صفر یافت شود، مجموعه بردارها را **وابسته خطی** می‌نامیم.

مثال: استقلال یا وابستگی خطی سه بردار  $\vec{V}_1(1, 1, 3), \vec{V}_2(1, 2, 1), \vec{V}_3(2, 3, 4)$  را بررسی کنید.

$$C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + C_3 \vec{V}_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow C_1(1, 1, 3) + C_2(1, 2, 1) + C_3(2, 3, 4) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0 \\ 3C_1 + C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (1-3) - (4-9) + 2(1-6) = 5 + 5 - 10 = 0$$

با توجه به اینکه دترمینان ماتریس ضرایب صفر است نتیجه می‌گیریم دستگاه پاسخی غیر از صفر دارد و بنابراین

سه بردار وابستگی خطی دارند.

# رتبه یک ماتریس:

به هر ماتریس عدد صحیح و مثبتی به نام رتبه‌ی ماتریس را نسبت می‌دهیم که با استفاده از این عدد در مورد جواب‌های دستگاه‌های معادلات خطی را بررسی می‌کنیم.

تعریف: فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $m$  در  $n$  باشد. حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس  $A$  را رتبه‌ی ماتریس  $A$  می‌نامیم و با  $r(A)$  نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر اگر  $R_1, R_2, \dots, R_m$  سطرهای ماتریس  $A$  باشند، رتبه‌ی  $A$  برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در مجموعه‌ی  $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  است.

یک روش تعیین رتبه‌ی ماتریس  $A$  این است که بزرگترین زیر ماتریس مربع  $A$  را که دترمینان آن مخالف صفر باشد به دست آوریم. تعداد سطرهای این ماتریس برابر رتبه‌ی ماتریس  $A$  است.

# خواص رتبه ی ماتریس

الف) رتبه ی ماتریس واحد  $I_n$  برابر با  $n$  است، یعنی:  $r(I_n) = n$

ب) رتبه ی ماتریس  $A$  با رتبه ی ترانواده ی  $A$  برابر است، یعنی:  $r(A^T) = r(A)$

پ) اگر  $A$  ماتریس  $n \times n$  باشد،  $r(A) = n$  اگر و تنها اگر  $\det(A) \neq 0$ . به بیان دیگر اگر  $\det(A) = 0$  آنگاه  $r(A) < n$  و برعکس.

ت) رتبه ی حاصلضرب دو ماتریس همواره نابیشتر از کوچکترین رتبه دو ماتریس است.

یعنی:  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

*توابع خطی*

## تعریف

تابع  $n$  متغیره‌ی  $f$  از فضای برداری  $R^n$  به فضای برداری  $R^m$  را که به ازای هر عدد حقیقی  $r$  و

هر دو  $n$  تایی  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  و  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$  از فضای برداری  $R^n$  داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۱) f(X + Y) = f(X) + f(Y) \\ ۲) f(r X) = r f(X) \end{cases}$$

یا به طور معادل:

$$f(X + rY) = f(X) + r f(Y)$$

## قضیه

تابع  $f : R^n \rightarrow R^m$  خطی است، اگر و تنها اگر هر مؤلفه مقدار تابع  $f$  در  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  به صورت یک ترکیب خطی از اعداد  $x_1, x_2, \dots, x_n$  باشد.

به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$f(X) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = AX$$

ماتریس  $A$  را ماتریس نمایشگر تابع خطی  $f$  می‌نامیم.

$$f : R^n \rightarrow R^m$$

$$f(X) = AX$$

# تعریف

✓ تابع  $f : R^n \rightarrow R^m$  را که برای هر  $X$  به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع صفر می‌نامیم.

$$f(X) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \diamond & \diamond & \cdots & \diamond \\ \diamond & \diamond & \cdots & \diamond \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \diamond & \diamond & \cdots & \diamond \end{bmatrix}_{m \times n} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} \diamond \\ \diamond \\ \vdots \\ \diamond \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

✓ تابع  $f : R^n \rightarrow R^n$  را که برای هر  $X$  به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع همانی می‌نامیم.

$$f(X) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \diamond & \cdots & \diamond \\ \diamond & 1 & \cdots & \diamond \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \diamond & \diamond & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = I_n \times X = X$$

# تعریف

توابع خطی  $f : R^n \rightarrow R^m$  و  $g : R^n \rightarrow R^m$  را در نظر می‌گیریم:

(۱) مجموع توابع  $f$  و  $g$  را با  $(f + g)$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f + g)(X) = f(X) + g(X)$$

(۲) فرض می‌کنیم  $k$  عددی حقیقی باشد. حاصلضرب عدد حقیقی  $k$  در  $f$  را با  $(k f)$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(k f)(X) = k f(X)$$