

به نام خدا

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

Applications of Mathematics in Management

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم تحقیقات

منابع:

ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (جلد دوم) – نشر نی – محمدحسین پورکاظمی
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (جلد دوم) – گسترش علوم پایه – مسعود نیکوکار

ماتریس و دترمینان



هدف کلی

هدف کلی این فصل آشنایی دانشجو با مفاهیم ماتریس، انواع ماتریسها و کاربردهای آن در حسابداری، اقتصاد و مدیریت است.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند:



۱. انواع ماتریسها را تشخیص دهد.

۲. اعمال جبری، جمع، تفاضل، حاصلضرب عدد در ماتریس و حاصلضرب دو ماتریس را توضیح داده و برای ماتریسهای داده شده، مقدار حاصل را محاسبه کند.

۳. خواص و ویژگیهای اعمال جبری روی ماتریسها را بیان کرده، با ویژگیهای اعداد حقیقی مقایسه کند.

۴. ترانهاده ماتریس داده شده را به دست آورده و خواص آن را در حل مسائل به کار برد.



۵. دترمینان ماتریسهای مربع را به روشهای مختلف محاسبه کرده و خواص آن را در حل مسائل به کار برد.

۶. وارون یک ماتریس مربع را تعریف کرده و وارون یک ماتریس وارون پذیر را به روشهای مختلف محاسبه کند.

۷. اعمال سطری مقدماتی را تعریف کرده و در محاسبه وارون یک ماتریس از آن استفاده کند.



۸. روش حل دستگاههای m معادله n مجهولی خطی همگن و غیرهمگن را توضیح داده و در صورت وجود جواب یا جوابهای دستگاه را در حالتهاى مختلف به دست آورد.
۹. رتبه هر ماتریس داده شده را بیابد.



۱۰. با استفاده از رتبه ماتریس ضرایب دستگاه m معادله n مجهولی خطی، درباره وجود و تعداد جوابهای دستگاه بحث کند.

۱۱. تابع خطی را تعریف کرده و اعمال جبری روی توابع خطی را انجام دهد.



۳-۱ ماتریس

۳-۱-۱ تعریف

هر جدولی از اعداد را که شامل m سطر و n ستون باشد، یک ماتریس m در n می‌نامیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{یا}$$



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هریک از اعداد a_{ij} را یک **عنصر** یا **درآیه** ماتریس می‌نامیم. در اینجا i اندیس سطر و j

اندیس ستون است، به بیان دیگر، عنصر a_{ij} در محل تلاقی سطر i ام و ستون j ام ماتریس قرار دارد.

ماتریس A را اختصاراً با نماد $A = (a_{ij})_{m \times n}$ یا اگر ابهامی پیش نیاید با



$A = (a_{ij})$ نشان می‌دهیم.

برای مثال، هر یک از نمادهای

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = [2, -3, 7, 4, 5]$$

یک ماتریس است.

A ، B ، C و D به ترتیب ماتریسهای 3×4 ، 4×1 ، 2×2 و 1×5 هستند.

۳-۱-۲ تعریف

الف) هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$ تنها دارای یک سطر باشد، یعنی $m = 1$ ، این

ماتریس را یک **ماتریس سطری** (بردار سطری) می‌نامیم. ماتریس D در ۳-۱-۱ و



ماتریس $[1 \text{ و } 4 \text{ و } -3]$ دو ماتریس سطری‌اند.

ب) اگر ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$ تنها دارای یک ستون باشد. یعنی $n = 1$ ، این ماتریس

را یک **ماتریس ستونی** (بردار ستونی) می‌نامیم. ماتریس B در $1-1-3$ و ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ دو ماتریس ستونی‌اند.}$$



پ) اگر تمام عناصر ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$ صفر باشند، آن را **ماتریس صفر** می‌نامیم

و به صورت $A = \mathbf{0}_{m \times n}$ یا $A = \mathbf{0}$ نشان می‌دهیم.

برای مثال

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



E یک ماتریس صفر 3×4 و F یک ماتریس صفر 3×2 است.

۳-۱-۳ تعریف

ماتریسی را که تعداد سطرها و تعداد ستونهاش برابر باشد، یک **ماتریس مربع** می‌نامیم.

به بیان دیگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ یک ماتریس مربع است اگر و تنها اگر $m = n$. در

ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ، قطری را که شامل عناصر a_{11} ، a_{22} و ... و a_{nn}



است قطر اصلی و این عناصر را عناصر قطر اصلی می نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$



۳-۱-۴ تعریف

ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را یک ماتریس همانی یا واحد $n \times n$ نامیده و با I_n

نشان می‌دهیم، در صورتی که هر یک از عناصر روی قطر اصلی برابر با یک و سایر

عناصر ماتریس صفر باشند، یعنی

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n$$



برای مثال ماتریسهای

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به ترتیب ماتریسهای واحد 2×2 ، 3×3 و 4×4 هستند.



۳-۱-۵ تساوی دو ماتریس

دو ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{p \times q}$ را برابر می‌گوییم، اگر $m = p$ و $n = q$

و برای هر i و j که $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $a_{ij} = b_{ij}$ برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$



مثالها



۳-۱-۶ مثال

مقدار a را طوری بیابید که داشته باشیم

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2a & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل.

بنابر تعریف تساوی دو ماتریس باید داشته باشیم $2a = 4$ یا $a = 2$.



بازگشت

اکنون به تعریف جمع دو ماتریس و ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس می پردازیم.



۳-۱-۷ تعریف

فرض می‌کنیم $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{m \times n}$ دو ماتریس $m \times n$ و K یک عدد

حقیقی باشد.

الف) حاصل جمع این دو ماتریس را با $A + B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف

می‌کنیم



$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

ب) حاصلضرب عدد حقیقی K در ماتریس A را با KA نشان داده و به صورت زیر

تعریف می‌کنیم.

$$KA = (Ka_{ij})_{m \times n}$$

هریک از ماتریسهای $A + B$ و KA ماتریسهای $m \times n$ هستند. توجه داشته باشید که



جمع دو ماتریس که دارای تعداد سطرهای متفاوت یا تعداد ستونهای متفاوت باشند



تعریف نشده است.

مثالها



منوی اصلی

۳-۱-۸ مثال

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای $A+B$ و $3A+2B$ را بیابید.



مثالهای بعدی



منوی اصلی



بازگشت

حل.

بنابر ۳-۱-۷ داریم

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1 & 2+3 & 4+5 \\ -1+0 & 3-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



ماتریس اصلی



ماتریس بعدی



مثالهای پیشین

$$3A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 12 \\ -3 & 9 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & 7+7 & 12+10 \\ -3+0 & 9-2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 22 \\ -3 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$



ماتریس اصلی



ماتریس میانی



ماتریس نهایی

۳-۱-۹ تعریف

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ، ماتریس A را قرینه ماتریس A می‌نامیم و با

$$-A = (-a_{ij})_{m \times n} \text{ نشان می‌دهیم.}$$

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ، بنابراین تعریف داریم

$$A - B = A + (-B)$$



مثالها



۳-۱-۱۰ مثال

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

قرینه B و ماتریس $2B - 3A$ را بیابید.



مثالهای بعدی



منوی اصلی



بازگشت

حل.

بنابر ۳-۱-۹ داریم

$$-B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2B - 3A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 14 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 10 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$= \begin{bmatrix} 2-6 & 0-3 \\ 4+10 & -2+3 \\ 14+0 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 14 & 1 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$



خواص جمع ماتریسها و ضرب عدد در ماتریس در قضیه زیر آمده است.

۳-۱-۱۱ قضیه

اگر A ، B و C سه ماتریس $m \times n$ و K و h دو عدد حقیقی باشند، آنگاه

$$A + B = B + A \quad \text{(الف)}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{(ب)}$$

$$K(A + B) = KA + KB \quad \text{(پ)}$$



$$(K + h)A = KA + hA \quad (ت)$$

برهان.

اثبات تمام قسمت‌ها از تعاریف مربوطه به دست می‌آیند. برای نمونه (ب) را

ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ، $B = (b_{ij})_{m \times n}$ و $C = (c_{ij})_{m \times n}$.

داریم

$$A + (B + C) = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij} + c_{ij})_{m \times n}$$

$$= (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})_{m \times n}$$

$$= (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} + (c_{ij})_{m \times n}$$

$$= (A + B) + C$$



مثالها



منوی اصلی

۳-۱-۱۲ مثال

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. ماتریس C را طوری بیابید که

$$3A - 2C = 4B.$$

حل:

با توجه به خواص جمع ماتریسها و ضرب عدد در ماتریس داریم



متنوی اصلی



مثالهای بعدی



بازگشت

$$-2C = 4B - 3A \Rightarrow C = \frac{3}{2}A - 2B$$

پس

$$C = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-6 & -3-10 \\ 6+4 & 9+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -13 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$$



اکنون به معرفی حاصلضرب دو ماتریس می پردازیم.

۳-۱-۳ ضرب دو ماتریس

ماتریسهای $A = (a_{ij})_{m \times p}$ و $B = (b_{ij})_{p \times n}$ را در نظر می گیریم. منظور از حاصلضرب

ماتریس A در ماتریس B ، ماتریس $m \times n$ ای مانند C است به طوری که



$$C = (c_{ij})_{m \times n}$$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

حاصلضرب ماتریس A در ماتریس B را با AB نشان می‌دهیم.

توجه کنید که عنصر ij ام ماتریس حاصلضرب AB برابر با حاصلضرب عددی



سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B است. یعنی

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

سطر i ام ماتریس A ستون j ام ماتریس B



$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

عنصر سطر i ام ستون j ام AB

بنابر تعریف بالا، حاصلضرب AB وقتی ممکن است که تعداد ستونهای



مثالها

ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B باشد.



۳-۱-۱۴ مثال

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ماتریسهای AB و BA را محاسبه

کنید.

حل.

بنابر تعریف ۳-۱-۱۳ داریم



متن اصلی



مثالهای بعدی



بازگشت

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(-3) + (2)(1) + (1)(-2) & (-1)(-2) + (2)(-1) + (1)(4) \\ (3)(-3) + (0)(1) + (2)(-2) & (3)(-2) + (0)(-1) + (2)(4) \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -13 & 2 \end{bmatrix}$$

و

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} (-3)(-1) + (-2)(3) & (-3)(2) + (-2)(0) & (-3)(1) + (-2)(2) \\ (1)(-1) + (-1)(3) & (1)(2) + (-1)(0) & (1)(1) + (-1)(2) \\ (-2)(-1) + (4)(3) & (-2)(2) + (4)(0) & (-2)(1) + (4)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -6 & -7 \\ -4 & 2 & -1 \\ 14 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

به طوری که دیده می شود ماتریسهای حاصل ضرب AB و BA برابر نیستند. بنابراین عمل



ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجایی نیست.

۳-۱-۱۵ قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد، آنگاه

$$AI_n = A = I_n A$$

برهان.

فرض می‌کنیم $I_n = (e_{ij})_{n \times n}$ و $AI_n = (c_{ij})_{n \times n}$ ، بنابر تعریف



۳-۱-۱۳ داریم

$$c_{ij} = a_{i1}e_{1j} + a_{i2}e_{2j} + \dots + a_{ij}e_{jj} + \dots + e_{in}e_{nj}$$

از طرفی بنابر تعریف ماتریس همانی داریم

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

لذا برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت



$$c_{ij} = 0 + 0 + \dots + a_{ij}(1) + 0 + \dots + 0$$

در نتیجه $AI_n = A$ ، به همین ترتیب می توان نشان داد که $I_n A = A$.

۳-۱-۱۶ قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{m \times p}$ ، $B = (b_{ij})_{p \times q}$ و $C = (c_{ij})_{q \times n}$ ، آنگاه $A(BC) = (AB)C$.

برهان قضیه را که مطالعه آن برای دانشجویان اختیاری است در زیر می آوریم.



برهان.

بنابر تعریف ۱-۳-۱۳، اگر $F = BC = (f_{ij})_{p \times n}$ عنصر ij ام ماتریس

$$A(BC) = D = (d_{ij})_{m \times n} \text{ برابر است با}$$

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{k=1}^p a_{ik} f_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik} \left(\sum_{t=1}^q b_{kt} c_{tj} \right) \end{aligned}$$



$$= \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^q a_{ik} b_{kt} c_{tj}$$

از طرفی، اگر $AB = H = (h_{ij})_{m \times q}$ ، عنصر ij ام ماتریس $(AB)C = R = (r_{ij})_{m \times n}$

برابر است با

$$r_{ij} = \sum_{t=1}^q h_{it} c_{tj}$$

$$= \sum_{t=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kt} \right) c_{tj}$$



$$= \sum_{t=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kt} c_{tj}$$

$$= \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^q a_{ik} b_{kt} c_{tj}$$

به طوری که دیده می شود برای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و هر $j = 1, 2, \dots, n$ داریم $d_{ij} = r_{ij}$ ،

در نتیجه $A(BC) = (AB)C$. یعنی عمل ضرب ماتریسها شرکتپذیر است.

مثالها



منوی اصلی

۳-۱-۱۷ مثال

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حاصل ضربهای $A(BC)$ و $(AB)C$ را محاسبه کنید.

حل:

داریم .

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (7)(-1) + (-2)(2) & (7)(0) + (-2)(1) \\ (-3)(-1) + (1)(2) & (-3)(0) + (1)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(-11) + (2)(5) & (1)(-2) + (2)(1) \\ (3)(-11) + (7)(5) & (3)(-2) + (7)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$



ماتریس اصلی



مثالهای قبلی



مثالهای بعدی

۳-۱-۱۸ مثال

فرض کنید A و B و C سه ماتریس باشند. نشان دهید از تساوی $AB = AC$

نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = C$.

حل:

کافی است مثالی ارائه دهیم که تساوی $AB = AC$ برقرار باشد ولی

$B \neq C$. فرض کنید



مثالهای پیشین

مثالهای بعدی منوی اصلی

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به طوری که دیده می شود $B \neq C$ ولی $AB = AC$.



۳-۱-۱۹ قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{p \times n}$ ، $B = (b_{ij})_{p \times n}$ و $C = (c_{ij})_{m \times p}$ آنگاه

$$C(A + B) = CA + CB$$

برهان.

عنصر ij ام ماتریس $C(A + B) = (d_{ij})_{m \times n}$ برابر است با



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^p c_{ik} (a_{kj} + b_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^p (c_{ik} a_{kj} + c_{ik} b_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^p c_{ik} a_{kj} + \sum_{k=1}^p c_{ik} b_{kj}$$

چون مجموع اوّلی، عنصر ij ام ماتریس CA و مجموع دومی عنصر ij ام



ماتریس CB است، لذا حکم قضیه اثبات شده است.

۳-۱-۲۰ ترانهاده ماتریس

اگر در ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$ جای سطرها و ستونها را با یکدیگر عوض کنیم،

ماتریس حاصل را **ترانهاده** (Transpose) ماتریس A می‌نامیم و آن را با A^T نشان

می‌دهیم. به بیان دیگر $A^T = (b_{ij})_{n \times m}$ که در آن برای هر i و j داریم $b_{ij} = a_{ji}$.

مثالها



منوی اصلی

برای مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$



۳-۱-۲۱ قضیه

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه

(الف) $(A^T)^T = A$ ، یعنی ترانهادۀ ترانهادۀ ماتریس A با ماتریس A برابر

است.



ب) $(kA)^T = k(A)^T$ ، یعنی ترانهاده مضربی از یک ماتریس با همان مضرب ترانهاده ماتریس برابر است.

پ) $(A + B)^T = A^T + B^T$ ، یعنی ترانهاده مجموع دو ماتریس با مجموع ترانهاده‌های دو ماتریس برابر است.

ت) اگر A و B دو ماتریس مربع می‌باشند، آنگاه $(AB)^T = B^T A^T$ ، یعنی



ترانهاده حاصلضرب دو ماتریس با حاصلضرب ترانهاده ماتریس دومی در ترانهاده ماتریس اولی برابر است.

برهان.

برای نمونه حکم (پ) را اثبات می‌کنیم. اثبات سایر قسمت‌ها را به دانشجویان واگذار می‌کنیم. فرض می‌کنیم $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ، پس



$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

بنابر تعریف ۳-۱-۲۰ داریم

$$(A + B)^T = (a_{ij} + b_{ji})_{n \times m}$$

$$= (a_{ji})_{n \times m} + (b_{ji})_{n \times m}$$

$$= A^T + B^T$$



مثالها



منوی اصلی

۳-۱-۲۲ مثال

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. درستی حکم (ت) قضیه ۲-۱-۲۱ را

برای این دو ماتریس تحقیق کنید.

حل.



منوی اصلی



مثالهای بعدی



بازگشت

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$$

از طرفی داریم

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$



$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$$

به طوری که دیده می شود، داریم $(AB)^T = B^T A^T$

اینک به تعریف انواع دیگری از ماتریسها می پردازیم.



۳-۱-۲۳ تعریف

الف) ماتریس مربع A را متقارن می‌نامیم، اگر $A^T = A$. برای مثال، ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

متقارن است. توجه کنید در ماتریس متقارن، عناصر ماتریس

نسبت به قطر اصلی متقارن هستند.



ب) ماتریس مربع A را **شبه متقارن** می‌نامیم، اگر $A^T = -A$. اگر A یک

ماتریس شبه متقارن باشد، باید برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} = -a_{ji}$. اما از

$a_{ii} = -a_{ii}$ نتیجه می‌شود $a_{ii} = 0$. بنابراین عناصر قطر اصلی در ماتریس شبه متقارن

همگی برابر صفراند.



برای مثال، ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس شبه متقارن است.



پ) ماتریس مربع A را یک **ماتریس قطری** می‌نامیم. اگر همه عناصر غیرواقع بر

قطر اصلی آن صفر باشند. برای مثال ماتریسهای

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad \text{و}$$



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A و B قطری و به ترتیب $n \times n$ و 3×3 هستند.

ت) ماتریس قطری S را یک **ماتریس اسکالر** می نامیم، اگر عناصر قطر اصلی آن

برابر عدد ثابت K باشد، یعنی



$$S = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

از تعریف ضرب عدد در ماتریس نتیجه می‌شود که اگر S ماتریسی $n \times n$ باشد، آنگاه

برای مثال، داریم

$$S = kI_n$$



$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)I_4$$

(ث) ماتریس $n \times n$ ، C را **متعامد** می‌نامیم اگر $CC^T = C^T C = I_n$ برای مثال اگر

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ و}$$



$$C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

آنگاه داریم

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C^T C = I_2$$

بنابراین C ماتریس متعامد است.



ج) ماتریس مربع U را ماتریس مثلثی بالا می‌نامیم، اگر تمام عناصر زیر قطر

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

اصلی آن صفر باشند. مثلاً

یک ماتریس مثلثی بالا است.

ج) ماتریس مربع L را ماتریس مثلثی پایین می‌نامیم، اگر تمام عناصر بالای قطر

اصلی ماتریس صفر باشند. پس



$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$



مثالها

یک ماتریس مثلثی پایین است.



منوی اصلی

۳-۱-۲۴ مثال

نوع هر یک از ماتریسهای زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

حل.

A یک ماتریس قطری، B یک ماتریس اسکالر، مثلثی بالا و مثلثی پایین، C یک ماتریس مثلثی بالا و D یک ماتریس مثلثی پایین است.



۳-۱-۲۵ تعریف

در ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ، مجموع تمام عناصر قطر اصلی را اثر A نامیده و با

$\text{tr}(A)$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ii}$$



برای مثال، اگر

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -7 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \\ 7 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

آنگاه اثر A برابر است با

$$\text{tr}(A) = -2 + 1 + 4 + 7 = 10$$



۲-۳ دترمینان

به هر ماتریس مربع، عددی به نام **دترمینان** نسبت داده می‌شود. در حل بسیاری از

مسائل خطی از جمله دستگاه‌های معادلات خطی از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان

یک ماتریس را به روش استقرایی تعریف می‌کنیم. ابتدا دترمینان ماتریس 1×1 ، سپس



دترمینان ماتریس 2×2 و ... را تعریف می‌کنیم. دترمینان ماتریس A را با $\det A$ یا

$|A|$ نشان می‌دهیم.

۱-۲-۳ تعریف

۱. ماتریس 1×1 تنها دارای یک عنصر a_{11} است، **دترمینان** این ماتریس را برابر با عدد

a_{11} تعریف می‌کنیم.



برای مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det A = 2$$

۲. دترمینان ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$



به صورت زیر تعریف می شود

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

برای مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، دترمینان A برابر است با



$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (3)(4) = -14$$

و نیز داریم

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (0)(4) - (-2)(3) = 6$$

برای تعریف دترمینان ماتریسهای با ابعاد بزرگتر ابتدا چند مفهوم را معرفی می‌کنیم.



۳-۲-۲ تعریف

ماتریس $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M_{ij} ، ماتریسی

$(n-1) \times (n-1)$ باشد که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست آمده

است. دترمینان ماتریس M_{ij} ، یعنی $|M_{ij}|$ را **مینور** یا **کهاد** عنصر a_{ij} در ماتریس A

می‌نامیم.



برای مثال، اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ ، آنگاه

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (3)(6) - (1)(-4) = 22$$

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(6) - (4)(7) = -34$$

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (4)(5) = -21$$



$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-4) - (2)(7) = -10$$

۳-۲-۳ تعریف

همسازه یا کوفاکتور

عنصر a_{ij} در ماتریس $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را که عددی حقیقی است



با A_{ij} نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

برای مثال، برخی همسازهای ماتریس A در ۲-۲-۳ عبارت اند از،

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = (-1)^2 (22) = 22$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = (-1)^4 (-34) = -34$$



$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = (-1)^5 (-21) = 21$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = (-1)^5 (-10) = 10$$

اینک دترمینان ماتریسهای $n \times n$ را تعریف می‌کنیم.

۳-۲-۴ تعریف

دترمینان ماتریس $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را به صورت



$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

تعریف می‌کنیم و می‌گوییم دترمینان A بر حسب سطر i ام بسط داده شده است. ثابت

می‌کنند که این دترمینان برابر است با

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$



و می‌گوییم دترمینان برحسب ستون j ام بسط داده شده است.

توجه کنید چون داریم $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ ، لذا علامت جمله‌ها در بسط

دترمینان برحسب سطر i ام یا ستون j ام یک در میان منفی خواهد بود.

بنابراین تعریف برای محاسبه دترمینان یک ماتریس، یک سطر یا یک ستون را

انتخاب می‌کنیم. هر عنصر این سطر یا ستون را در همسازهاش ضرب، سپس مقادیر

حاصل را با هم جمع می‌کنیم.



می‌توان ثابت کرد که مقدار دترمینان یک ماتریس منحصر به فرد است و مقدار دترمینان بستگی به انتخاب سطر یا ستون ماتریس ندارد.

توجه کنید که بنابر تعریف محاسبه دترمینان یک ماتریس $n \times n$ منجر به محاسبه

دترمینان ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ می‌شود، این روند را تا رسیدن به دترمینان

ماتریسهای 2×2 ادامه می‌دهیم، تا دترمینان ماتریس مورد نظر محاسبه شود.



مثالها



۳-۲-۵ مثال

دترمینان ماتریس 3×3 زیر را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$



حل.

دترمینان A را نسبت به سطر اول بسط می دهیم، داریم

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$= (0 - 16) + (2 - 12) + 2(8 - 0) = -10$$

اینک مقدار دترمینان همین ماتریس را نسبت به ستون دوم بسط می‌دهیم،

به دست می‌آوریم

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$



$$= (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (4)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (2 - 12) + 0(1 - 6) - 4(4 - 4) = -10$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

اگر دترمینان را بر حسب سطر یا ستونی که بیشترین تعداد صفر را دارد محاسبه کنیم، محاسبات کوتاهتر می‌شود، زیرا نیازی به محاسبه همسازهای صفر نیست، چون حاصلضرب صفر در هر همسازهای برابر با صفر است.



مثنوی اصلی



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

۳-۲-۶ مثال

دترمینان ماتریس 4×4 زیر را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

حل.



منوی اصلی



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

دترمینان ماتریس A را می‌توان نسبت به هر سطر یا هر ستونی بسط داد.

به‌طوری که دیده می‌شود سطر سوم و ستون دوم دارای بیشترین تعداد صفر هستند،

بنابراین بهتر است دترمینان را نسبت به یکی از آنها بسط دهیم. بسط دترمینان A نسبت

به سطر سوم برابر است با



مثنوی اصلی



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34}$$

$$= (4)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} + (0)A_{32} + (0)A_{33} + (1)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

اینک دترمینانهای 3×3 اخیر را نسبت به سطر سوم حساب می‌کنیم



منوی اصلی



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

$$\det A = \varepsilon \left[0(-1)^{r+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{r+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{r+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$- \left[(7)(-1)^{r+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{r+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{r+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \varepsilon [(0 - 2) + 0(-4 - 3)] - [7(-4 - 3) - (-1 - 0)] = -108$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

برای امتحان، دترمینان A را نسبت به ستون دوم نیز بسط می‌دهیم، داریم

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$$

$$= 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} + (0)A_{32} + (0)A_{42}$$

دترمینان ماتریسهای 3×3 حاصل را نسبت به سطر دوم بسط می‌دهیم



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$= -\varepsilon \left[\varepsilon(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + (1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$+ \left[\varepsilon(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + (1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -\varepsilon [-\varepsilon(-0 + 0) - (-2 + 7)] + [-\varepsilon(10 + 2) - (1 - 21)]$$

$$= -108$$



اکنون خواص دترمینان را بدون اثبات در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

۳-۲-۷ قضیه (خواص دترمینان)

۱. دترمینان ماتریس مربع A و ترانهاده A برابر است یعنی

$$|A^T| = |A|$$

۲. اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریس A صفر باشند، آنگاه



$$|A| = 0$$

۳. اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریس A را در عدد r ضرب کنیم آنگاه

دترمینان ماتریس حاصل برابر با $r|A|$ است.

۴. دترمینان ماتریس حاصل از تعویض دو سطر یا دو ستون ماتریس A مساوی با

منهای دترمینان A است.



۵. اگر دو سطر یا دو ستون ماتریسی برابر باشند، آنگاه مقدار دترمینان آن برابر با صفر است.

۶. دترمینان ماتریس حاصل از جمع مضرب اسکالری از یک سطر (یا ستون) با سطر (یا ستونی) دیگر از ماتریس A مساوی با دترمینان A است.



۷. دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر با حاصلضرب دترمینانهای آنها است یعنی

$$|AB| = |A| |B|$$

۸. دترمینان یک ماتریس قطری برابر است با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی آن است.

۹. دترمینان ماتریس همانی برابر با یک است، یعنی $|I_n| = 1$.



۱۰. دترمینان یک ماتریس مثلثی بالا یا پایین برابر با حاصلضرب عناصر روی قطر

اصلی آن است.

مثالها



منوی اصلی

۳-۲-۸ مثال

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، دترمینان A (نسبت به سطر دوم) برابر است با

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (3)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(4 + 10) - 3(-5 + 2) = -5$$



ترانهاده ماتريس A برابر است با

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (5)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$= -2(2+3) - 5(-3+2) = -5$$

به طوری که دیده می شود، داریم

$$|A^T| = |A|$$



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین



مثالهای پیشین

۳-۲-۹ مثال

الف) چون تمام عناصر سطر سوم ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

صفراند، بنابر خاصیت دوم قضیه ۳-۲-۷ داریم



منوی اصلی



مثالهای قبلی



مثالهای پیشین

$$\det A = 0$$

ب) چون ستونهای اول و سوم ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

برابرند، بنابر خاصیت پنجم قضیه ۷-۲-۳ داریم $|B| = 0$



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

پ) بنابر خاصیت هشتم قضیه ۳-۲-۷ دترمینان ماتریس

$$D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}$$

برابر است با

$$|D| = (-۱)(۱)(۳)(-۴) = ۱۲$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

ت) بنابر خاصیت سوم قضیه ۷-۲-۳ داریم

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2(3 - 5) = -4$$



۳-۲-۱۰ تعریف

اگر دترمینان ماتریس $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ، برابر صفر باشد، ماتریس A را **منفرد می‌نامیم**،

در غیر این صورت ماتریس را **نامنفرد** می‌گوییم.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

برای مثال، ماتریس



منفرد است. زیرا

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + (0)A_{12} + (0)A_{13}$$

$$= -(-12 + 12) + 0 + 0 = 0$$

ماتریس



$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

نامنفرد است، زیرا دترمینان B برابر است با

$$|B| = (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= -(5 - 6) = 1 \neq 0$$



۳-۳ وارون ماتریس

در این بخش وارون یک ماتریس مربع را تعریف کرده و دو روش برای تعیین آن ارائه می‌کنیم.



۳-۳-۱ تعریف

ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را وارون‌پذیر می‌نامیم، اگر ماتریسی مانند $B = (b_{ij})_{n \times n}$

وجود داشته باشد به‌طوری که

$$AB = BA = I_n$$

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه وارون آن منحصر به فرد است، زیرا اگر



ماتریسهای B و C هر دو وارون ماتریس A باشند، آنگاه چون B و C وارون A است،

پس $AB = I_n$ ، $CA = I_n$ و داریم

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_n B = B$$

یعنی وارون A در صورت وجود یکتا است.



مثالها



منوی اصلی

وارون ماتریس A را در صورت وجود با نماد A^{-1} نشان می دهیم.

۳-۳-۲ مثال

نشان دهید ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است.

حل.

داریم

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$



و

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

بنابراین $A^{-1} = B$.



۳-۳-۳ مثال

وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

حل.

فرض می‌کنیم A ماتریسی وارون‌پذیر باشد و وارون آن ماتریس



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

باشد. بنابر تعریف ۳-۳-۱ باید داشته باشیم $AB = I_2$ ، پس

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + 2c & -b + 2d \\ 4c & 4d \end{bmatrix}$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

از تساوی بالا، دستگاه زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} -a + 2c = 1 \\ -b + 2d = 0 \\ 4c = 0 \\ 4d = 1 \end{cases}$$

جواب دستگاه بالا، عبارت است از

$$c = 0 \quad \text{و} \quad d = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad a = -1 \quad \text{و} \quad b = \frac{1}{2}$$



در نتیجه وارون ماتریس A برابر است با

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



منوی اصلی



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

۳-۳-۴ مثال

نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست.

حل.

فرض می کنیم برعکس $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون A باشد.



لذا داریم $AB = I_2$ ، و بنابراین

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b - d \\ 1a + 3c & 1b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از تساوی بالا، دستگاه زیر نتیجه می شود



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ 7a + 3c = 0 \\ 7b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1 \\ 7a + 3c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

اگر معادله اول دستگاه دو معادله و دو مجهولی (۱) را برای حذف مجهول c در عدد

(۳-) ضرب و با معادله دوم جمع کنیم به دست می آوریم $0 = -3$ که غیرممکن است،

بنابراین دستگاه (۱) و در نتیجه دستگاه اصلی دارای جواب نیست. یعنی ماتریس A



وارون پذیر نیست.

به طوری که مشاهده می شود، تعیین وارون یک ماتریس منجر به حل یک دستگاه

چند معادله و چند مجهولی می شود. در فصل چهارم، روش حل این دستگاه ها را خواهیم

دید. اینک برای تعیین وارون یک ماتریس به روش تحویل سطری، ابتدا، **اعمال سطری**

مقدماتی را معرفی می کنیم.



۳-۳-۵ اعمال سطری مقدماتی

ماتریس $A = (a_{ij})_{m \times n}$ را در نظر می‌گیریم. هریک از اعمال زیر را که بر روی سطرهای ماتریس A انجام می‌پذیرد، یک **عمل سطری مقدماتی** می‌نامیم.



۱. تعویض دو سطر ماتریس A

۲. ضرب یک سطر ماتریس A در یک عدد ناصفر

۳. افزودن مضربی از یک سطر ماتریس A به سطر دیگری.

برای اختصار در نوشتن اعمال سطری مقدماتی، از حرف R ، اول کلمه ROW



به معنای سطر به صورت زیر استفاده می کنیم.

الف) $R_i \Leftrightarrow R_j$ به معنای تعویض سطر i ام و سطر j ام است.

ب) kR_i به معنای حاصل ضرب سطر i ام ماتریس در عدد ناصفر k است.

پ) $R_j + kR_i$ به معنای افزودن k برابر سطر i ام به سطر j ام است.



۳-۳-۶ تبدیل یک ماتریس مربع نامنفرد به ماتریس همانی به وسیله اعمال سطری

مقدماتی

با استفاده از عملیات سطری مقدماتی هر ماتریس مربع نامنفرد را می توان به ماتریس

واحد تبدیل کرد. در اینجا روش این کار را بیان می کنیم ماتریس نامنفرد

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ را در نظر می گیریم. چون A نامنفرد است، پس دست کم یکی از عناصر

ستون اول آن غیر صفر است. اگر $a_{11} = 0$ ، سطر اول ماتریس A را با سطر i ام که در



آن $a_{i1} \neq 0$ عوض می‌کنیم. بنابراین می‌توان فرض کرد که $a_{11} \neq 0$.

۱. سطر اول A را در $\frac{1}{a_{11}}$ ضرب می‌کنیم. اینک با استفاده از سطر اول، تمام

عناصر ستون اول به‌جز a_{11} را تبدیل به صفر می‌کنیم.

۲. با استفاده از سطر دیگری به‌جز سطر اول، تمام عناصر ستون دوم به‌جز a_{22}

را تبدیل به صفر می‌کنیم.



این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا A تبدیل به ماتریس واحد شود.

توجه کنید وقتی که سطری برای صفر کردن عناصر ستونی به کار می‌رود، از این

سطر برای صفر کردن ستونهای دیگر استفاده نشود.



اگر هنگام عملیات، تمام عناصر سطری از ماتریس صفر شود، این ماتریس منفرد

است و نمی‌توان به وسیله اعمال سطری مقدماتی آن را تبدیل به ماتریس همانی کرد.

مثالها



منوی اصلی

۳-۳-۷ مثال

ماتریس A را به وسیله اعمال سطری مقدماتی تبدیل به ماتریس همانی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$A \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



$$\xrightarrow{R_r + R_1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\Delta}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\Delta}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_r - R_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\Delta}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + 11R_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_r - \Delta R_r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



۳-۳-۸ قضیه

اگر ماتریس وارون‌پذیر A به وسیله یک سلسله اعمال سطری مقدماتی تبدیل به ماتریس همانی شود، آنگاه با انجام همین سلسله اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس همانی، وارون ماتریس A به دست می‌آید.



برای بدست آوردن وارون ماتریس A ، معمولاً اعمال سطری مقدماتی را به طور همزمان بر روی ماتریس A و ماتریس همانی انجام می دهند. لذا ماتریس مرکب $[A | I]$ را در نظر گرفته و با انجام یک سلسله اعمال مقدماتی سطری آن را تبدیل به

ماتریس مرکب $[I | B]$ می کنیم. بنابر قضیه بالا، B برابر با وارون ماتریس A است.  مثالها



۳-۳-۹ مثال

وارون ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

داریم



متنوی اصلی



مثالهای بعدی



بازگشت

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

$$\xrightarrow{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$



$$\xrightarrow{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right]$$



بنابر قضیه ۳-۳-۸ داریم

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

درستی جواب را امتحان می‌کنیم، داریم

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

و

$$A^{-1}A = I_3$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

۳-۳-۱۰ مثال

نشان دهید ماتریس زیر وارون پذیر نیست.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل:

داریم



متنوی اصلی



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-R_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



$$\xrightarrow{R_3 - 4R_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

چون تمام عناصر سطر سوم ماتریس A به وسیله اعمال مقدماتی سطری تبدیل به صفر شده‌اند پس A ماتریسی منفرد است، بنابراین A را نمی‌توان تبدیل به ماتریس همانی نمود، بنابراین A وارون پذیر نیست.



اینک روش دیگری برای محاسبه وارون یک ماتریس با استفاده از دترمینان و

ماتریس الحاقی معرفی می‌کنیم. بدین منظور ابتدا به تعریف ماتریس الحاقی یک

ماتریس مربع می‌پردازیم.



۳-۳-۱۱ تعریف

ترانهاده ماتریس همسازهای ماتریس مربع A را ماتریس الحاقی A نامیده و با $\text{adj } A$

نشان می دهیم. پس

$$\text{adj } A = (A_{ij})^T$$



مثالها



منوی اصلی

۳-۳-۱۲ مثال

ماتریس الحاقی ماتریس A را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

حل.

همسازهای عناصر ماتریس A عبارتند از



منوی اصلی



مثالهای بعدی



بازگشت

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$



$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$



$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

بنابراین ماتریس همسازهای A برابر است با

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس الحاقی A برابر است با



$$\text{adj } A = B^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$



۳-۳-۱۳ قضیه

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I_n$$

۳-۳-۱۴ نتیجه

اگر $\det A \neq 0$ ، آنگاه وارون A وجود دارد و برابر است با



$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$



مثالها

عکس این نتیجه نیز درست است. یعنی اگر A وارون پذیر باشد، آنگاه $\det A \neq 0$.



منوی اصلی

۳-۳-۱۵ مثال

وارون ماتریس داده شده در مثال ۳-۳-۱۲ را با استفاده از ماتریس الحاقی تعیین کنید.

حل.

دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$



$$= (1)(6) + (2)(-2) + (3)(-3) = -7$$

چون $\det A \neq 0$ ، پس A^{-1} وجود دارد. بنابر ۱۴-۳-۳ داریم

$$A^{-1} = \frac{-1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$



۳-۳-۱۶ مثال

نشان دهید ماتریس A وارون ندارد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ -3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

حل.

دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم.



مثالهای بعدی



مثالهای پیشین

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ -3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 8 \\ -3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

چون ستونهای اول و دوم این ماتریس مساوی‌اند، لذا دترمینان آن صفر است، بنابراین

$$\det A = -2(0) = 0$$

چون $\det A = 0$ ، پس، A وارون‌پذیر نیست.



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

خواص وارون ماتریس در قضیه زیر آمده است.

۳-۳-۱۷ قضیه

اگر A و B دو ماتریس مربع $n \times n$ و وارون پذیر باشند، آنگاه

الف) ماتریس حاصلضرب AB وارون پذیر است و

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$



ب) ماتریس ترانهاده A وارون پذیر است و

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

پ) وارون ماتریس وارون A برابر A است، یعنی

$$(A^{-1})^{-1} = A$$



ت) دترمینان وارون ماتریس A برابر با معکوس دترمینان A است

یعنی

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

برهان.

الف) بنابر تعریف وارون ماتریس داریم



$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

به همین ترتیب

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$$

در نتیجه، $B^{-1}A^{-1}$ وارون ماتریس AB است.



ب) داریم

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

و

$$(A^{-1})^T(A^T) = (AA^{-1})^T = I^T = I$$



در نتیجه $(A^{-1})^T$ وارون ترانهاده ماتریس A است.

پ) از رابطه $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ نتیجه می شود که A وارون A^{-1} است.

ت) چون

$$\det(A^{-1}A) = \det I = 1$$



$$\det(A^{-1}A) = (\det A^{-1})(\det A)$$

$$\text{بنابراین } (\det A^{-1})(\det A) = 1$$

چون $\det A \neq 0$ ، لذا به دست می آوریم

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$



مثالها



۳-۳-۱۸ مثال

دترمینان وارون ماتریس A را بدون محاسبه A^{-1} تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



مسئله اصلی



مثالهای بعدی



بازگشت

حل.

داریم

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

و

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0)A_{31} + (2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$



مثالهای بعدی منوی اصلی



مثالهای پیشین

$$= (-2)(3-2) + (3)(3-2) = 1$$

بنابراین دترمینان وارون A برابر است با

$$\det A^{-1} = 1$$



پایان

