

به نام خدا

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

Applications of Mathematics in Management

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم تحقیقات

منابع:

ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (جلد دوم) - نشر نی - محمدحسین پورکاظمی
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (جلد دوم) - گسترش علوم پایه - مسعود نیکوکار

معادلات دیفرانسیل

حل برخي از مسایل در مدیریت و اقتصاد منجر به بررسی معادله ای بین يك تابع مجهول و مشتقهای آن می شود. چنین معادله ای را يك معادله ی دیفرانسیل می نامیم. در این فصل با معرفی چند نوع معادله ی دیفرانسیل ساده روش حل آنها را مطالعه می کنیم.

آشنایی با معادلات دیفرانسیل

تعريف 5.1.1

فرض کنید y تابعی از x باشد هر معادله ای به صورت $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ را که در آن تابعی از $n+2$ متغیر x, y و n مشتق اول y نسبت به x باشد یک معادله ی دیفرانسیل معمولی مرتبه ی n می نامیم.

توجه کنید منظور y از مشتق n ام y نسبت به x است و مرتبه y يك معادله y ديفرانسیل برابر با مرتبه y بالاترین مشتق موجود در معادله است.

تعريف 5.1.2

تابع $y=f(x)$ را يك جواب معادله ي ديفرانسيل

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

در فاصله ي a مي ناميم. در صورتي كه به ازاي هر x متعلق به a تابع $y=f(x)$ و مشتق هاي آن در معادله صدق كنند.

مجموعه ي تمام جوابهاي معادله را جواب عمومي معادله مي ناميم.
منظور از حل يك معادله ي ديفرانسييل به دست آوردن جواب عمومي آن است.

تعريف 5.1.4

معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي ام

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

با شرايط اوليه

$$\begin{aligned} y(x_0) &= k_0 \\ y'(x_0) &= k_1 \\ y''(x_0) &= k_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= k_{n-1} \end{aligned}$$

را كه در آن ها اعداد معينى هستند يك مسئله با مقادير اوليه مي ناميم.

توجه کنید که برای معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n ام شرط اولیه وجود دارد. این شرایط مقادیر تابع مجهول و $(n-1)$ مشتق اول آن را در نقطه ی x_0 معین می کنند. می توان نشان داد که با وضع محدودیتهایی بر F یک مسئله با مقادیر اولیه دارای یک جواب منحصر به فرد است. این جواب را جواب خصوصی مسئله می نامیم.

تعريف 5.1.7

يك معادله ي ديفرانسيل با مشتقات جزئي معادله ايست كه شانل يك تابع مجهول چند متغيره (بیش از يك متغير) همراهم با مشتقات جزئي آن باشد.

معادلات دیفرانسیل جدایی 5.2 پذیر

در این بخش روش حل معادلات دیفرانسیلی را بررسی می کنیم که می توان متغیرهای آنها را از یکدیگر جدا کرد.

تعریف 5.2.1

معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول $p(x)dx+q(y)dy=0$ را که در آن p و q دو تابع حقیقی به ترتیب در فاصله های I_1 و I_2 پیوسته اند یک معادله ی دیفرانسیل جدایی پذیر می نامیم.

با انتگرالگيري مستقيم از اين معادله جواب عمومي آن به صورت زير به دست مي آيد.

$$p(x)dx + \int q(y)dy = c$$